


FONDO PIZZOFALCONE

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL.





Cet Ouvrage se trouve

A Angers, chez Fourier-Mame.
Angoulême, chez Bargeas et chez Broquisse.
Autun, chez Dauphin.
Bourg, chez Vernarel et chez Bottier.
Bruxelles, chez le Charlier.
Colmar, chez Fontaine.
Clermont-Ferrand, chez Rousset.
Dijon, chez Coquet.
Genêve, chez Paschoud.
Lille, chez Vanackere.
Lyon, chez les frères Perisse, et chez Tournachon
Metz, chez Devilly.
Nancy, chez Mme Bontoux.
Nismes, chez Gaude et Melquion.
Périgueux, chez Mme Dubreuil.
Rennes, chez Bloquet.
Rouen, chez Vallée frères, et chez Renault.
Strasbourg, chez Levrault frères.
Toulouse, chez Devers.
Tours, chez Pescherard et Mame.
Aux Sables, chez Feret.
Bayonne, chez Gosse et Bonzom.
Nantes, chez Foret.
Bordeaux, chez Sigal, et Bergeret.
Saint-Omer, chez Huguet.
Dunkerque, chez Frémaux.
La Rochelle, chez Sanlecque.
Meaux, chez Guédon.
Besançon, chez Deis, et Girard.
Fontainebleau, chez Lequatre.
Saint-Brieux, chez Prud'homme.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL;

PAR S. F. LACROIX.

DEUXIÈME ÉDITION, revue et corrigée.



A PARIS,
Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1806.

AVIS DU LIBRAIRE.

La première édition de ce Traité était précédée de Réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier, dans les examens, le savoir de ceux qui les ont étudiées; *on ne trouvera point ici ces Réflexions, parce qu'ayant reçu de nouveaux développemens, elles font partie de l'ouvrage que l'Auteur a publié sous le titre d*'Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier.

Tout Exemplaire du présent Traité, qui ne porterait pas comme ci-dessous, les signatures de l'Auteur et du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la Loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.

Lacroix

Courcier

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Calcul différentiel.

SECONDE PARTIE.

Calcul intégral.

De l'intégration des fonctions de deux, ou d'un plus grand nombre de variables.

De la méthode des variations.

APPENDICE AU TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Des différences et des séries.

Fin de la Table des Matières.

TRAITÉ

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Notions préliminaires et principes de la différentiation des fonctions d'une seule variable.

1. DANS cette partie de l'Analyse, on prend pour sujet le passage d'une ou de plusieurs quantités par différens états de grandeur, et les changemens qui en résultent dans d'autres quantités dépendantes pour leur valeur de celle des premières.

2. Pour exprimer qu'une quantité dépend d'une ou de plusieurs autres, soit par des opérations quelconques, soit même par des relations impossibles à assigner algébriquement, mais dont l'existence est déterminée par

des conditions certaines, on dit que la première est *fonction* des autres. L'usage de ce mot en éclaircira la signification.

3. La quantité considérée comme changeant de grandeur, ou pouvant en changer, est appelée *variable;* et l'on donne le nom de *constante* à celle que l'on considère comme conservant toujours la même valeur dans le cours du calcul. On voit d'après cela que c'est la nature de la question qu'on se propose qui détermine quelles sont les quantités qu'on doit regarder comme variables ou comme constantes.

4. Pour éclaircir ceci, je vais donner quelques exemples; soit $u=ax$, a étant regardé comme constante : u est une fonction de x, de l'ordre le plus simple, puisque c'est une quantité proportionnelle à cette variable. Si on suppose que x devienne $x+h$, et qu'on représente par u' la nouvelle valeur de u, on aura $u'=ax+ah$, d'où $u'-u=ah$; et en divisant les deux membres par h, il viendra $\frac{u'-u}{h}=a$, c'est-à-dire, que le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable est indépendant de leur valeur particulière.

Je passe à la fonction un peu plus compliquée $u=ax^2$; en mettant $x+h$ au lieu de x, il vient $u'=a(x^2+2xh+h^2)$, et en retranchant la première équation de la seconde, $u'-u=2axh+ah^2$: divisant les deux membres par h, on aura $\frac{u'-u}{h}=2ax+ah$. Ici le rapport des accroissemens de la fonction et de la variable est composé de deux parties; l'une ne dépend point de la valeur particulière des accroissemens, et l'autre est affectée de h. Si on conçoit que

cette quantité aille en diminuant, le résultat s'approchera sans cesse de $2ax$, et n'y atteindra qu'en supposant $h=0$; ensorte que $2ax$ est la *limite* du rapport $\frac{u'-u}{h}$, c'est-à-dire, *la valeur vers laquelle ce rapport tend à mesure que la quantité* h *diminue, et dont il peut approcher autant qu'on le voudra.*

Il est aisé de voir que la différence $u'-u$ s'anéantit toujours en même temps que h, puisque c'est l'existence seule de cette dernière quantité qui donne lieu à la première; cependant leur rapport ne s'anéantit pas : il est de l'espèce de quantités indiquée dans le n° 70 des Elémens d'Algèbre.

Faisant encore $u=ax^3$, on aura par la substitution de $x+h$, au lieu de x,

$$u'=a(x+h)^3=ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3;$$

en retranchant la première équation de la seconde, on trouvera $u'-u=3ax^2h+3axh^2+ah^3$, et prenant le rapport des accroissemens, $\frac{u'-u}{h}=3ax^2+3axh+ah^2$. On voit encore ici un terme indépendant de toute valeur particulière des accroissemens et vers lequel leur rapport tend sans cesse, lorsque h diminue, ensorte que ce rapport a aussi une limite.

Ce premier terme, ou cette limite, n'est pas particulier aux fonctions que nous venons d'examiner, il se rencontre dans toute fonction en général. *En s'évanouissant, les accroissemens respectifs d'une fonction et de sa variable, conservent encore le rapport dont ils se sont approchés par degrés; et il existe entre ce dernier et la fonction dont il dérive, une dependance mutuelle qui détermine l'un par l'autre, et re-*

ciproquement. Ces assertions s'éclaircissent et se confirment d'une manière très-satisfaisante par la considération des courbes, ainsi qu'on le verra dans la suite (61, 62).

5. Je ferai d'abord connaître les signes par lesquels on exprime les nouvelles relations que les notions précédentes établissent entre les grandeurs. Pour en montrer la convenance, je reprends la fonction $u=ax^3$, déjà considérée dans le n° 4.

En y mettant $x+h$, au lieu de x, et retranchant la quantité ax^3 du résultat, on a obtenu, dans l'expression

$$u'-u=3ax^2h+3axh^2+ah^3,$$

le développement de la *différence* des deux états de la fonction u, ordonné suivant les puissances de l'accroissement h, qu'on suppose à la variable x; et la limite $3ax^2$ du rapport des accroissemens $u-u'$ et h, ne dépend que de la considération du premier terme $3ax^2h$ de cette différence (4). Ce premier terme qui n'est qu'une portion de la différence, s'appelle *différentielle*, et on le désigne par du, en se servant de la lettre d comme d'une caractéristique; on aura donc dans l'exemple proposé, $\mathrm{d}u=3ax^2h$.

Pour passer de là à $3ax^2$, qui est la limite cherchée, il faudra diviser par h, et l'on obtiendra $\frac{\mathrm{d}u}{h}=3ax^2$; mais quand il s'agit d'une variable simple, comme la quantité x se change en $x'=x+h$, on a $x'-x=h$; la différence et la différentielle ne sont alors qu'une même chose: on remplace en conséquence la quantité h par le signe dx, afin de mettre de l'uniformité dans les calculs, et il vient

$$\mathrm{d}u=3ax^2\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3ax^2;$$

la première expression sera la différentielle de u ou de ax^3, et la seconde qui exprime la limite du rapport des changemens simultanés de la fonction et de la variable, prendra le nom de *coefficient différentiel*, parce que la quantité qu'elle représente n'est autre chose que le multiplicateur de la différentielle dx, dans l'expression de la différentielle du. Il suit de là que *la limite du rapport des accroissemens, ou le coefficient différentiel, s'obtiendra en divisant la différentielle de la fonction par celle de la variable;* et réciproquement, *on obtiendra la différentielle en multipliant la limite du rapport des accroissemens, ou le coefficient différentiel, par la différentielle de la variable.*

Cette remarque est importante parcequ'il y a des fonctions dont le coefficient différentiel se trouve plus facilement que la différentielle. En effet, pour parvenir immédiatement à cette dernière, *il faut écrire* x + dx *au lieu de* x, *dans la fonction proposée, développer le résultat suivant les puissances de* dx, *en s'arrêtant au terme affecté de la première puissance, et retrancher du résultat l'expression primitive.* On voit que cette méthode suppose qu'on sache développer la fonction proposée, ce qui peut demander des secours étrangers dont la considération des limites dispense le plus souvent.

D'après ces diverses considérations, *le Calcul différentiel est la recherche de la limite du rapport des accroissemens simultanés d'une fonction et de la variable dont elle dépend.*

6. Il faut bien se garder de confondre la différentielle avec la différence $u'-u$. En effet, dans l'exemple du nº 4, l'une est $3ax^2h$, et l'autre

$$3ax^2h + 3axh^2 + ah^3;$$

mais on voit que lorsque la quantité h est très-petite, la différentielle $3ax^2h$ forme la partie la plus considérable de la différence $u'-u$, et que la différentielle s'approche de plus en plus de la différence, à mesure que h diminue. En général, *il y a d'autant moins d'erreur à prendre la différentielle pour la différence, que l'on suppose plus petite la valeur de l'accroissement de la variable.* La même conséquence se tire aussi de la considération des limites; car si le rapport des accroissemens simultanés $u'-u$ et h a pour limite une fonction p, il en approchera sans cesse; l'équation $\frac{u'-u}{h}=p$ sera d'autant plus exacte, que l'accroissement h sera plus petit, et dans cette hypothèse $u'-u=ph$ (*).

Il est à propos de remarquer que lorsque le résultat de la substitution de $x+h$ sera développé suivant les puissances de h dans la forme

$$U+ph+qh^2+\text{etc.}$$

le premier terme U sera la valeur primitive de la fonction proposée, puisque c'est à ce terme seul que se réduit l'expression ci-dessus, quand on y fait $h=0$, ce qui suppose que x n'a pas changé.

7. Il est aisé de voir que deux fonctions égales ont des différentielles égales; car, lorsque deux fonctions sont égales entr'elles, quelle que soit la valeur de la variable dont elles dépendent, il faut que les changemens respectifs qu'elles reçoivent en conséquence de celui qu'on attribue à cette variable, soient toujours égaux. Si, par exemple, u et v désignent des fonc-

(*) C'est sur ce principe que Leibnitz a fondé le Calcul différentiel, en regardant les différentielles comme des différences infiniment petites.

tions de x telles que $u = v$, quel que soit x, et que quand x devient $x + \mathrm{d}x$, u se change en u' et v en v' ; on aura encore $u' = v'$: retranchant de cette équation la précédente, il en résultera

$$u' - u = v' - v;$$

puis divisant par $\mathrm{d}x$, on obtiendra

$$\frac{u' - u}{\mathrm{d}x} = \frac{v' - v}{\mathrm{d}x}.$$

Si donc p et q désignent les limites des rapports ci-dessus, on aura $p = q$, d'où l'on conclura $p\mathrm{d}x = q\mathrm{d}x$, et enfin $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$, en observant que, d'après le n° 5, $p\mathrm{d}x$ et $q\mathrm{d}x$ sont les différentielles des fonctions u et v.

L'inverse de cette proposition n'est pas généralement vraie, et on aurait tort d'affirmer que deux différentielles égales appartiennent à des fonctions égales. En effet, si on avait $a + bx$, en substituant $x + \mathrm{d}x$ à x, on obtiendrait $a + bx + b\mathrm{d}x$, et en retranchant $a + bx$, on trouverait $b\mathrm{d}x$; résultat dans lequel il ne reste aucune trace de la constante a. La différentielle $b\mathrm{d}x$ appartient donc également à $a + bx$ ou à bx ; et elle convient en général aux différens cas que présente la fonction $a + bx$, lorsqu'on donne à a toutes les valeurs possibles. On voit aisément par-là, que dans la différentiation d'une fonction quelconque, toutes les constantes combinées seulement par voie d'addition ou de soustraction disparaissent : à l'égard de celles qui le sont par la multiplication ou par la division, elles restent toujours comme coefficiens ou comme diviseurs.

8. Avant de passer à la recherche des différentielles par les limites, il faut remarquer,

1°. *Que la limite du produit de deux quantités variables en même temps, est le produit de leurs limites correspondantes;* 2°. *que la limite des quotiens des*

mêmes quantités, est aussi le quotient de leurs limites.

En effet, soient P et Q les deux quantités proposées, p et q leurs limites correspondantes ; les premières considérées dans leur état général, peuvent être représentées par $p+\alpha$, $q+\beta$, en désignant par α et β des quantités susceptibles de s'évanouir en même tems, après avoir passé par tous les degrés de petitesse (4) : on aura donc en général,

$$PQ=(p+\alpha)(q+\beta)=pq+p\beta+q\alpha+\alpha\beta.$$

Le second membre de cette équation se réduit à pq, lorsque pour prendre les limites on fait $\alpha=0$, $\beta=0$. On voit d'ailleurs qu'en donnant aux quantités α et β des valeurs convenables, on peut rendre aussi petite qu'on voudra la différence

$$PQ-pq=p\beta+q\alpha+\alpha\beta.$$

Le quotient $\frac{P}{Q}=\frac{p+\alpha}{q+\beta}$

étant mis sous la forme

$$\frac{P}{Q}=\frac{p}{q}+\frac{p+\alpha}{q+\beta}-\frac{p}{q}$$

devient, par la réduction des deux dernières fractions au même dénominateur,

$$\frac{P}{Q}=\frac{p}{q}+\frac{q\alpha-p\beta}{q(q+\beta)}.$$

Le numérateur de la dernière fraction de ce résultat s'évanouit, lorsque α et β sont zéro, et passe auparavant par tous les degrés de petitesse, tandis que le dénominateur approche sans cesse de q^2. Ainsi la limite de $\frac{P}{Q}$ se réduit à $\frac{p}{q}$, et la différence

$$\frac{P}{Q}-\frac{p}{q}=\frac{q\alpha-p\beta}{q(q+\beta)}$$

peut être rendue aussi petite qu'on voudra.

9. Au moyen des remarques précédentes on obtient le coefficient différentiel d'une fonction rapportée à une variable, dont elle ne dépend pas immédiatement. Si, par exemple, trois quantités v, u, x, telles que la première soit une fonction de la seconde, et celle-ci une fonction de la troisième, passent simultanément à un nouvel état de grandeur représenté par v', u', x', ou prennent les accroissemens respectifs

$$v'-v,\quad u'-u,\quad x'-x,$$

les rapports de ces accroissemens étant

$$\frac{v'-v}{u'-u},\quad \frac{u'-u}{x'-x},$$

et leurs limites

$$\frac{dv}{du}=p,\quad \frac{du}{dx}=q,$$

on conclura de la première des remarques précédentes que la limite de

$$\frac{v'-v}{u'-u}\times\frac{u'-u}{x'-x}\ \text{ou de}\ \frac{v'-v}{x'-x},$$

est pq, et que parconséquent

$$\frac{dv}{dx}=pq=\frac{dv}{du}\times\frac{du}{dx}.$$

Quand l'accroissement $u'-u$, sera successivement comparé à $x'-x$ et à $v'-v$, et que pour les rapports

$$\frac{u'-u}{x'-x},\ \text{et}\ \frac{u'-u}{v'-v}$$

on aura les limites

$$\frac{du}{dx}=p,\quad \frac{du}{dv}=q,$$

on conclura de la seconde remarque que la limite de

$$\frac{\dfrac{u'-u}{x'-x}}{\dfrac{u'-u}{v'-v}} \text{ ou de } \frac{v'-v}{x'-x},$$

est $\frac{p}{q}$; et que parconséquent

$$\frac{dv}{dx} = \frac{p}{q} = \frac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{du}{dv}}.$$

Lorsque deux quantités u et x sont liées par une dépendance mutuelle, on peut dire également que u est fonction de x, ou bien que x est fonction de u, selon que l'on veut regarder u comme déterminé par x, ou x comme déterminé par u; le coefficient différentiel peut aussi se présenter sous chacun de ces points de vue. Si dans le premier cas on a $\frac{du}{dx} = p$, il est évident qu'on doit avoir dans le second $\frac{dx}{du} = \frac{1}{p}$.

10. Je vais appliquer maintenant ce qui précède à la recherche des différentielles des fonctions qui se présentent dans les Élémens d'Algèbre, c'est-à-dire des sommes, des différences, des produits, des quotiens, des puissances et des racines. Premièrement, lorsque plusieurs quantités dépendantes de x, et dont on sait trouver la différentielle, sont jointes ensemble par addition et soustraction comme dans cet exemple $u + v - w$, si la substitution de $x + dx$, au lieu de x, doit changer

$$u \text{ en } u + \alpha, \quad v \text{ en } v + \beta, \quad w \text{ en } w + \gamma,$$

l'expression $u + v - w$ deviendra

$$u + v - w + \alpha + \beta - \gamma.$$

Son changement, formé des termes $\alpha + \beta - \gamma$, et

comparé à l'accroissement dx de la variable x, donnera

$$\frac{\alpha}{dx}+\frac{\beta}{dx}-\frac{\gamma}{dx},$$

quantité dont la limite sera

$$p+q-r,$$

en désignant par p, q, r, les limites respectives des rapports particuliers $\frac{\alpha}{dx}$, $\frac{\beta}{dx}$, $\frac{\gamma}{dx}$; et en multipliant par dx la quantité $p+q-r$, le résultat $pdx+qdx-rdx$ sera la différentielle de la fonction proposée; mais pdx, qdx, rdx, sont les différentielles propres de chacune des fonctions u, v, et w, ou représentent du, dv, dw : on aura donc

$$d(u+v-w)=du+dv-dw,$$

c'est-à-dire, *que la différentielle d'une fonction de* x, *composée de plusieurs termes, s'obtiendra en prenant la différentielle de chaque terme avec le signe dont ce terme est affecté.*

11. Secondement, si dans le produit des deux fonctions, u et v, u se change en $u+\alpha$, v en $v+\beta$, ce produit devient

$$uv+u\beta+v\alpha+\alpha\beta;$$

et son accroissement

$$u\beta+v\alpha+\alpha\beta,$$

comparé à dx, donne l'expression

$$u\frac{\beta}{dx}+v\frac{\alpha}{dx}+\frac{\alpha}{dx}\beta.$$

En désignant comme ci-dessus, par p et q, les limites respectives des rapports $\frac{\alpha}{dx}$, $\frac{\beta}{dx}$; puis faisant attention que l'accroissement β s'évanouit en même-temps que dx, dont les quantités u et v sont d'ailleurs indépendantes, on reconnaît que la limite du terme $\frac{\alpha}{dx}\beta$

est zéro (8), et que celle des deux autres est

$$uq + vp.$$

On conclut de là (5) que la différentielle de uv est

$$uq\mathrm{d}x + vp\mathrm{d}x;$$

mais $q\mathrm{d}x$ et $p\mathrm{d}x$ sont équivalens à $\mathrm{d}v$ et à $\mathrm{d}u$: donc $\mathrm{d}.uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$ (*).

La formule $\mathrm{d}.uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$, apprend que *pour avoir la différentielle du produit de deux fonctions, il faut multiplier chacune par la différentielle de l'autre, et ajouter ensemble les deux résultats.*

Si on divise les deux membres de l'équation,

$$\mathrm{d}.uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$$

par la fonction primitive uv, on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}.uv}{uv} = \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}v}{v};$$

ce qui conduira facilement à l'expression de la différentielle d'un produit composé d'autant de facteurs qu'on voudra. Pour cela on supposera que $v = ts$, il viendra

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\mathrm{d}.ts}{ts} = \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

et parconséquent

$$\frac{\mathrm{d}.uts}{uts} = \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

on trouvera de la même manière que

$$\frac{\mathrm{d}.utsr\ldots\text{etc.}}{utsr\ldots\text{etc.}} = \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{\mathrm{d}r}{r} + \text{etc.}$$

Si on fait évanouir les dénominateurs dans l'équation

(*) Lorsque l'on trouve un point après la caractéristique d, cela veut dire qu'elle porte sur tout ce qui la suit immédiatement ; ainsi $\mathrm{d}.uv$ est la même chose que $\mathrm{d}(uv)$, et $\mathrm{d}.x^n$ la même chose que $\mathrm{d}(x^n)$.

$$\frac{d.uts}{uts}=\frac{du}{u}+\frac{dt}{t}+\frac{ds}{s},$$

on trouvera $d.uts = tsdu + usdt + utds$; et on verra aisément que, *quel que soit le nombre des facteurs, la différentielle de leur produit sera égale à la somme des produits de la différentielle de chacun, multipliée par tous les autres.*

12. On obtient la différentielle de $\frac{u}{v}$ en faisant $\frac{u}{v} = t$; car il vient alors $u = vt$, et d'après ce qui précède, $du = vdt + tdv$; prenant la valeur de dt, et substituant au lieu de t, la fraction $\frac{u}{v}$, on aura $dt = \frac{dv}{v} - \frac{udv}{v^2}$, ou en réduisant au même dénominateur

$$dt = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

d'où il résulte que *pour trouver la différentielle d'une fraction, il faut multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur, retrancher de ce produit celui du numérateur par la différentielle du dénominateur, et diviser le tout par le quarré du dénominateur.*

Quand le numérateur de la fraction proposée est constant, u ne dépendant point de x, n'a point de différentielle, c'est-à-dire, que $du = 0$; et il vient seulement

$$dt = -\frac{udv}{v^2}.$$

13. La fonction x^n désignant, lorsque n est un nombre entier positif; le produit d'un nombre n de facteurs égaux à x, on déduira du n° 11.

$$\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{d.xxxx\ldots.}{xxxx\ldots.}$$
$$=\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\ldots.$$

Le nombre des facteurs du premier membre étant n, le

second sera composé d'un pareil nombre de termes égaux à $\frac{dx}{x}$; on aura donc

$$\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{ndx}{x},$$

d'où l'on conclura $d.x^n=nx^{n-1}dx$.

Si le nombre n est fractionnaire, en le représentant par $\frac{r}{s}$, on fera $x^{\frac{r}{s}}=v$, d'où $x^r=v^s$; puis posant

$$u=x^r \text{ et } u=v^s,$$

les nombres r et s étant supposés entiers, on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{du}{dx}=rx^{r-1},\quad \frac{du}{dv}=sv^{s-1};$$

d'où on tirera, par le n° 9,

$$\frac{dv}{dx}=\frac{rx^{r-1}}{sv^{s-1}}=\frac{rx^{r-1}}{sx^{\frac{r}{s}(s-1)}}.$$

En réduisant, on trouve

$$\frac{dv}{dx}=\frac{r}{s}x^{\frac{r}{s}-1},$$

et parconséquent

$$dv=\frac{r}{s}x^{\frac{r}{s}-1}dx,$$

ce qui revient encore à $d.x^n=nx^{n-1}dx$, n étant égal à $\frac{r}{s}$.

Enfin le nombre n étant négatif, on a $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$; d'où l'on tire par la formule du n° 12,

$$d.x^{-n}=d.\frac{1}{x^n}=\frac{-d.x^n}{x^{2n}};$$

et comme d'après ce qui précède $\mathrm{d}.x^n = nx^{n-1}\mathrm{d}x$, dans tous les cas où n est positif, on a donc

$$\mathrm{d}.x^{-n} = \frac{-nx^{n-1}\mathrm{d}x}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}\mathrm{d}x.$$

De cette énumération on conclut que *pour différentier une puissance quelconque d'une quantité variable, il faut la multiplier par son exposant, diminuer ensuite cet exposant d'une unité, et multiplier le résultat par la différentielle de la variable* (*).

14. Les règles énoncées dans les nos 10, 11, 12, 13, suffisent pour différentier toutes les fonctions où la variable n'est engagée que par addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances, entières ou fractionnaires, positives ou négatives. Les fonctions qui résultent des opérations algébriques se nomment par cette raison *fonctions algébriques*. Je vais en différentier quelques-unes pour montrer l'application des règles.

Soit 1°. $u = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$; en prenant séparément la différentielle de chaque terme de cette fonction, le premier disparaît parce qu'il est constant (7), le second mis sous la forme $bx^{\frac{1}{2}}$ donne par l'application de la règle du n° 13, $\frac{1}{2}bx^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}x$, ou $\frac{b\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$; le troisième $-\frac{c}{x}$ conduit à $+\frac{c\mathrm{d}x}{x^2}$ (13) : réunissant les résultats par-

(*) J'aurais pu déduire immédiatement cette règle du développement du binome $(x + \mathrm{d}x)^n$, puisque ce développement étant $x^n + nx^{n-1}\mathrm{d}x +$ etc. si on en retranche x^n, le premier terme de la différence sera $nx^{n-1}\mathrm{d}x$; mais je n'ai pas voulu supposer la démonstration de la formule du binome, parceque le Calcul différentiel en fournit une très-générale et très-simple.

tiels, on trouvera

$$du=\left(\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2}\right)dx \text{ et } \frac{du}{dx}=\frac{b}{2\sqrt{x}}+\frac{c}{x^2}.$$

2°. $u=a+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{c}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{e}{x^2}$: en écrivant cette fonction comme il suit,

$$u=a+bx^{-\frac{2}{3}}-cx^{-1-\frac{1}{3}}+ex^{-2},$$

l'application de la règle du n° 13 donnera

$$du=-\frac{2}{3}\frac{bdx}{x^{\frac{5}{3}}}+\frac{4}{3}\frac{cdx}{x^{\frac{7}{3}}}-\frac{2edx}{x^3},$$

ce qui revient à $du=-\frac{2bdx}{3x\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4cdx}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2edx}{x^3}.$

15. Les exemples ci-dessus ne comprennent que des monomes, mais il y a des fonctions qui ne peuvent, sans un développement préalable, être décomposées en termes de cette forme; telle est la fonction $u=(a+bx^m)^n$.

On fera dans ce cas $a+bx^m=z$, d'où $u=z^n$;

et en observant que $d.z^n=nz^{n-1}dz$ (13),

on obtiendra (9) $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\times\frac{dz}{dx}=nz^{n-1}\frac{dz}{dx}$;

or $dz=d(a+bx^m)=d.bx^m=mbx^{m-1}dx$:

donc $\frac{du}{dx}=n(a+bx^m)^{n-1}\times mbx^{m-1}$.

et $du=nmbx^{m-1}dx(a+bx^m)^{n-1}$.

Il est à-propos d'observer que ce qui précède revient à *différentier d'abord l'expression de* u *en* z, *et subtituer ensuite les valeurs de* z *et de* dz, *en* x *et* dx.

Si l'on avait $u=\sqrt{a+bx+cx^2}$, on regarderait le trinome $a+bx+cx^2$ comme une fonction particu-

lière

culière z, et la différentielle de $\sqrt{z}$ ou de $z^{\frac{1}{2}}$ étant $\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$, ou $\frac{dz}{2\sqrt{z}}$, il en résulterait

$$du = \frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Comme on a souvent besoin de différentier des radicaux du second degré, je ferai observer, d'après la formule $\frac{dz}{2\sqrt{z}}$, que *la différentielle d'un radical du second degré s'obtient en divisant celle de la quantité qui se trouve sous le signe, par le double du radical.*

16. La règle donnée (11) pour différentier les produits, étant appliquée à la fonction

$u = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$, conduit à

$$du = dx(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + x\sqrt{a^2-x^2}.d(a^2+x^2) + x(a^2+x^2)d\sqrt{a^2-x^2}$$

Les deux derniers termes de cette expression renferment des opérations qui ne sont qu'indiquées, mais qui s'effectuent successivement, en observant que

$$d(a^2+x^2) = d.x^2 = 2xdx,$$
$$d\sqrt{a^2-x^2} = \frac{d(-x^2)}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

et on trouve ensuite

$$du = \left\{(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + 2x^2\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\}dx:$$

réduisant tous les termes au même dénominateur,

on a enfin

$$du=\frac{(a^4+a^2x^2-4x^4)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

La règle concernant la différentiation des fractions, appliquée à la fonction $u=\frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$, donne immédiatement

$$du=\frac{(a^4+a^2x^2+x^4)d(a^2-x^2)-(a^2-x^2)d(a^4+a^2x^2+x^4)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2},$$

d'où on tire

$$du=\frac{-2x(2a^4+2a^2x^2-x^4)\,dx}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}.$$

Je terminerai ces exemples par la fonction

$$u=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3},$$

qui renferme plusieurs opérations algébriques à effectuer successivement. Pour en faciliter la différentiation, on peut faire

$$\frac{b}{\sqrt{x}}=y, \qquad \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}=z,$$

et on aura

$$u=\sqrt[4]{(a-y+z)^3}=(a-y+z)^{\frac{3}{4}};$$

la règle du n° 13 donnera

$$du=\tfrac{3}{4}(a-y+z)^{\frac{3}{4}-1}d(a-y+z)$$
$$=\tfrac{3}{4}(a-y+z)^{-\frac{1}{4}}(-dy+dz)$$
$$=\frac{-3dy+3dz}{4\sqrt[4]{a-y+z}}:$$

on trouvera ensuite

$$dy = d.\frac{b}{\sqrt{x}} = -b\frac{d.\sqrt{x}}{x} = \frac{-b dx}{2x\sqrt{x}},$$

$$dz = d.(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}-1} d(c^2-x^2)$$

$$= \tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{\frac{1}{3}} \times -2x dx = \frac{-4x dx}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}};$$

et substituant ces valeurs et celles de y et de z dans l'expression de du, il viendra

$$du = \left\{ \frac{\dfrac{3b}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{4x}{\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{4\sqrt[4]{a - \dfrac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}} \right\} dx.$$

Des différentiations successives.

17. Le coefficient différentiel étant une nouvelle fonction de x, peut être soumis à la différentiation, et donner, par la limite du rapport de son accroissement à celui de la variable x, son propre coefficient différentiel qui sera aussi une fonction de x. En faisant aussi succéder des différentiations les unes aux autres, on déduit de la fonction proposée une suite de limites ou de coefficiens différentiels, que l'on distingue en ordres d'après le nombre de différentiations qu'il a fallu effectuer pour les obtenir.

Si l'on fait $\frac{du}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, etc.

p représentera le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction proposée; q celui de la fonction p,

ou le coefficient du second ordre de la fonction proposée, r celui de la fonction q, ou le coefficient du troisième ordre de la fonction proposée, etc.; et il faut observer que les coefficiens q, r, etc. se tirent des différentielles successives de $\mathrm{d}u$, prises en y regardant l'accroissement $\mathrm{d}x$ comme une constante. Ces différentielles se marquent ainsi :

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}u)=\mathrm{dd}u=\mathrm{d}^2u\,,\qquad \mathrm{d}(\mathrm{d}^2u)=\mathrm{d}^3u,\ \text{etc.}$$

l'exposant qui affecte la caractéristique d indique une opération répétée, et non pas une puissance de la lettre d, qui n'est jamais considérée comme une quantité, mais seulement comme un signe. Cela posé, les équations

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=p\,,\quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=q\,,\quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}=r\,,\ \text{etc.}$$

donneront

$$\mathrm{d}u=p\mathrm{d}x\,,\quad \mathrm{d}p=q\mathrm{d}x\,,\quad \mathrm{d}q=r\mathrm{d}x\,,\ \text{etc.}$$

en différentiant de nouveau la première, sans y faire varier $\mathrm{d}x$, elle deviendra $\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}p\mathrm{d}x$, et mettant pour $\mathrm{d}p$ sa valeur tirée de la seconde, on aura $\mathrm{d}^2u=q\mathrm{d}x^2$ (*), d'où $q=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$; différentiant de nouveau l'équation $\mathrm{d}^2u=q\mathrm{d}x^2$, on trouvera $\mathrm{d}^3u=\mathrm{d}q\mathrm{d}x^2$, et comme $\mathrm{d}q=r\mathrm{d}x$, il en résultera $\mathrm{d}^3u=r\mathrm{d}x^3$, ou $r=\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}$: on aura donc $p=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $q=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$, $r=\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}$, etc.

18. Si la fonction proposée était, par exemple, ax^n,

(*) Il faut bien prendre garde que les expressions dx^2, dx^3..... sont équivalentes à $(dx)^2$, $(dx)^3$... et non pas à $d.x^2$, $d.x^3$.... (Voyez la note, page 12).

on trouverait $d.ax^n = nax^{n-1}dx$ (13) ; les facteurs na et dx étant regardés comme constans dans la différentielle première $nax^{n-1}dx$, il suffit (7) pour obtenir la différentielle seconde, de différentier x^{n-1} et de multiplier le résultat par $nadx$; mais $d.x^{n-1} = n(n-1)x^{n-2}dx$: on aura donc $d^2.ax^n = n(n-1)ax^{n-2}dx^2$.

On trouvera d'une manière semblable,

$$d^3.ax^n = n(n-1)(n-2)ax^{n-3}dx^3$$
$$d^4.ax^n = n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}dx^4$$
etc.

et les coefficiens différentiels auront les valeurs suivantes :

$$\frac{d.ax^n}{dx} = nax^{n-1}$$
$$\frac{d^2.ax^n}{dx^2} = n(n-1)ax^{n-2}$$
$$\frac{d^3.ax^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)ax^{n-3}$$
$$\frac{d^4.ax^n}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}$$
etc.

On remarquera sans peine que dans le cas où l'exposant n est un nombre entier positif, la fonction ax^n n'a qu'un nombre limité de différentielles dont la plus élevée est $d^n.ax^n = n(n-1)(n-2)\ldots.2.1.adx^n$; expression qui n'est plus susceptible de différentiation, puisqu'elle ne contient plus de variables : on aura donc alors pour le dernier coefficient différentiel,

$$\frac{d^n.ax^n}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\ldots.1.a,$$

c'est-à-dire, une quantité constante.

19. Cette remarque donne un moyen fort simple pour développer en série, suivant les puissances entières et positives de x, une fonction quelconque u de cette variable, lorsque cela est possible. En effet, si on pose l'équation

$$u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

et qu'on la différentie, on trouvera

$$\frac{du}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 1.2.3D + 2.3.4Ex + \text{etc.}$$

etc.

et si on a d'ailleurs en x l'expression des quantités

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.}$$

en désignant par U, U', U'', U''', etc. ce qu'elles deviennent lorsqu'on fait $x = 0$, on tirera des équations ci-dessus, en y supposant aussi $x = 0$,

$$A = U, \; B = \frac{1}{1}U', \; C = \frac{1}{1.2}U'', \; D = \frac{1}{1.2.3}U''', \text{ etc.}$$

d'où $$u = U + U'\frac{x}{1} + U''\frac{x^2}{1.2} + U'''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

20. Si on prend $u = (a + x)^n$, on aura

$$\frac{du}{dx} = n(a + x)^{n-1}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = n(n-1)(a + x)^{n-2},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = n(n-1)(n-2)(a + x)^{n-3}, \text{ etc.}$$

et faisant $x=0$, on obtiendra

$$U=a^n,\quad U'=na^{n-1},\quad U''=n(n-1)a^{n-2},$$
$$U'''=n(n-1)(n-2)a^{n-3},\ \text{etc.}$$

d'où on conclura

$$(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}x^3+\text{etc.}$$

Les principes de la différentiation ayant été donnés ci-dessus, sans supposer le développement de $(a+x)^n$, on doit le regarder maintenant comme prouvé pour tous les cas où l'exposant n est entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

En mettant, par exemple, les expressions

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{a^2+x^2} \\ \sqrt[3]{(a^2-x^2)^2} \\ \dfrac{1}{a+x} \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{a^4+x^4}} \end{array}\right\}\ \text{sous la forme}\ \left\{\begin{array}{l} a\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ a\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} \\ a^{-1}\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{-1} \\ a^{-1}\left(1+\dfrac{x^4}{a^4}\right)^{-\frac{1}{4}} \end{array}\right.$$

on en obtiendra le développement, suivant le procédé indiqué dans le n° 144 des Elémens d'Algèbre.

21. Le même moyen conduit à exprimer par les coefficiens différentiels le développement général de la valeur que prend la fonction u, quand on y substitue $x+h$ au lieu de x. En effet la fonction u, lorsqu'elle se changera en u' par cette substitution, pourra être regardée comme une fonction de h; on aura par le

n° précédent

$$u' = U + U'\frac{h}{1} + U''\frac{h^2}{1.2} + U'''\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

si U, U', U'', U''', etc.
désignent ce que deviennent

$$u', \quad \frac{du'}{dh}, \quad \frac{d^2u'}{dh^2}, \quad \frac{d^3u'}{dh^3}, \text{ etc.}$$

lorsqu'on y fait $h = 0$.

Il est d'abord visible que u' redevient u lorsqu'on y fait $h = 0$, et qu'on a parconséquent $U = u$; mais de plus les coefficiens différentiels ci-dessus, formés en regardant h comme variable et x comme constante, sont les mêmes que ceux qu'on trouverait en traitant x comme variable et h comme constante. Pour le prouver, soit $x + h = x'$; la fonction u' sera composée en x' comme la fonction u l'est en x : on en conclura $du' = p'dx'$, p' étant une fonction de x', et $dx' = d(x+h)$. Si l'on ne fait varier que h, on aura

$$dx' = dh, \quad du' = p'dh \text{ et } \frac{du'}{dh} = p' ;$$

et en ne faisant varier que x, on obtiendra

$$dx' = dx, \quad du' = p'dx \text{ et } \frac{du'}{dx} = p' :$$

donc $\frac{du'}{dh} = \frac{du'}{dx}$. La fonction p' étant elle-même une fonction de x', on aura encore

$$\frac{dp'}{dh} = \frac{dp'}{dx}, \text{ d'où } \frac{d^2u'}{dh^2} = \frac{d^2u'}{dx^2},$$

et en général

$$\frac{d^mu'}{dh^m} = \frac{d^mu'}{dx^m}.$$

Cela posé, lorsque $h = 0$, u' se change en u; il en

résultera

$$U'=\frac{du}{dx},\qquad U''=\frac{d^2u}{dx^2},\qquad U'''=\frac{d^3u}{dx^3},\ \text{etc.}$$

et $$u'=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Cette formule est connue sous le nom de *Théorême de Taylor*, parceque c'est ce géomètre anglais qui l'a donnée le premier (*).

Elle contient implicitement le développement du binome, car si l'on suppose $u=x^n$, u' deviendra $(x+h)^n$, et l'on aura

$$(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}\frac{h}{1}+n(n-1)x^{n-2}\frac{h^2}{1.2}$$
$$+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

(*) Je rapporterai encore ici une démonstration de cette formule. Ayant prouvé comme ci-dessus que

$\frac{du'}{dh}=\frac{du'}{dx}$, si l'on fait $u'=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{etc.}$

et qu'on suppose que les coefficiens A, B, C, D, etc. ne contiennent pas h, ils ne dépendront que de la variable x, et des quantités constantes qui entrent dans la fonction proposée; on aura donc

$$\frac{du'}{dh}=B+2Ch+3Dh^2+\text{etc.}$$
$$\frac{du'}{dx}=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}h+\frac{dC}{dx}h^2+\text{etc.}$$

égalant ces deux résultats, terme à terme, on trouvera

$$B=\frac{dA}{dx},\qquad C=\frac{1}{2}\frac{dB}{dx},\qquad D=\frac{1}{3}\frac{dC}{dx},\ \text{etc.}$$

or $A=u$, donc

$$B=\frac{du}{dx},\quad C=\frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2},\quad D=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3},\ \text{etc.}$$

Cette démonstration m'a été présentée à un exercice public dans une des principales maisons d'éducation de Paris.

22. La formule de *Taylor* montre aussi que les divers coefficiens differentiels ont encore la propriété remarquable de former, lorsqu'on les divise respectivement par les produits

$$1,\quad 1.2,\quad 1.2.3,\ \text{etc.}$$

les multiplicateurs de puissances de l'accroissement h, dans le développement complet de la différence

$$u'-u=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Ce développement, lorsqu'on y fait $h=dx$, devient (17)

$$u'-u=\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\text{etc.}$$

forme très-simple, ou l'on voit comment la différence de u correspondante à l'accroissement quelconque dx, se compose avec les différentielles des divers ordres, relatives au même accroissement.

De la différentiation des fonctions transcendantes.

23. Les fonctions qui ne sont pas comprises dans l'énumération faite au n° 14, se nomment *transcendantes*. La fonction exponentielle $u=a^x$ est la plus simple de ce genre. Lorsqu'on y susbstitue $x+\mathrm{d}x$ au lieu de x, la différence devient

$$a^{x+\mathrm{d}x}-a^x=a^x(a^{\mathrm{d}x}-1);$$

pour la développer suivant les puissances de $\mathrm{d}x$, on fait $a=1+b$, et il vient

$$a^{\mathrm{d}x}=(1+b)^{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}x}{1}b+\frac{\mathrm{d}x(\mathrm{d}x-1)}{1.2}b^2+\frac{\mathrm{d}x(\mathrm{d}x-1)(\mathrm{d}x-2)}{1.2.3}b^3+\text{etc.}$$

d'où on tire

$$a^{dx}-1=\left\{\frac{dx}{1}b+\frac{dx(dx-1)}{1.2}b^2\right.$$
$$\left.+\frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1.2.3}b^3+\text{etc}\right\},$$

et en ordonnant par rapport à dx,

$$a^{dx}-1=dx\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{etc.}\right)$$
$$+\text{etc.}$$

remettant pour b sa valeur $a-1$, il en résultera (5)

$$d.a^x=a^x dx\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-3)^3}{3}-\text{etc.}\right);$$

ainsi prenant

$$k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}+\text{etc.}$$

on aura $d.a^x=ka^x dx$. Telle est la forme de la différentielle de la fonction proposée, et on trouvera bientôt une nouvelle expression du nombre constant k.

24. Il est visible que

$$d^2.a^x=kdxd.a^x=k^2a^xdx^2$$
$$d^3.a^x\qquad=k^3a^xdx^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d^n.a^x\qquad=k^na^xdx^n;$$

et il suit de là que

$$\frac{du}{dx}=ka^x,\quad \frac{d^2u}{dx^2}=k^2a^x,\quad \frac{d^3u}{dx^3}=k^3a^x,\ \text{etc.}$$

Lorsque $x=0$, la fonction u et ses coefficiens diffé-

rentiels deviennent

$$U=1, \quad U'=k, \quad U''=k^2, \quad U'''=k^3, \text{ etc.}$$

on obtiendra donc (19)

$$a^x=1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{1.2}+\frac{k^3x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

25. Le développement de la fonction a^x, trouvé ci-dessus, servira pour reconnaître de quelle quantité la série représentée par k tire son origine.

Si l'on suppose $x=1$, il viendra

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Cette série étant peu propre à faire connaître a au moyen de k, on cherchera la valeur que doit avoir a, lorsque $k=1$; et en la désignant par e, on aura

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

En poussant cette série jusqu'à dix termes, et les évaluant tous en décimales, on trouvera

$$e=2,7182818.$$

Cela posé, puisque cette valeur répond à $k=1$, il s'ensuit que

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

que de même

$$e^k=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et que parconséquent $e^k=a$. Si on prend les logarithmes de part et d'autre, on obtiendra

$$kle = la, \text{ ou } k = \frac{la}{le};$$

on aura donc par là

$$d.a^x = ka^x dx = \frac{la}{le} a^x dx.$$

26. On peut à présent parvenir à la différentielle de la fonction logarithmique. En effet, si l'on nomme a la base du système, y le nombre, x le logarithme, on aura (*Alg.* 241) l'équation $y = a^x$; regardant x comme une fonction de y, et prenant les différentielles de chaque membre, on trouvera $dy = a^x k dx$, d'où on tirera (9).

$$dx = \frac{dy}{a^x k}, \text{ ou } d.ly = le\frac{dy}{y},$$

en remettant pour a^x sa valeur y, et pour k sa valeur $\frac{1}{le}$, puisque a est la base du système des logarithmes proposés.

27. Le nombre e se présente souvent dans les recherches analytiques ; on le prend pour base d'un système logarithmique, que j'ai appelé *Népérien*, du nom de Neper, inventeur des logarithmes, et que je représente par la caractéristique l' (*) : on a alors $l'e = 1$, $k = l'a$, et les résultats des n^{os} précédens deviennent

$$a^x = 1 + \frac{x(l'a)}{1} + \frac{x^2(l'a)^2}{1.2} + \frac{x^3(l'a)^3}{1.2.3} + \text{etc.} (24),$$

$$d.a^x = a^x dx.l'a (25), \quad d.l'y = \frac{dy}{y} (26).$$

Pour passer du système dont la base serait e, à celui

(*) Ces logarithmes étaient connus sous les noms fort impropres de logarithmes naturels ou hyperboliques.

dont la base serait a (*Alg.* 250), on aurait, en désignant ces systèmes par les caractéristiques l et l′,

$$ly = le.l'y;$$

et comme on compare tous les systèmes de logarithmes au système népérien, on appelle *module* le nombre le, par lequel il faut multiplier un logarithme népérien, pour passer au logarithme correspondant dans un autre système.

La *différentielle logarithmique* étant d'un grand usage, il faut se rappeler que *la différentielle du logarithme est égale au produit du module par la différentielle du nombre, divisée par le nombre même.*

28. Si on voulait passer de là au développement de x en y, ou du logarithme suivant les puissances du nombre, on trouverait que les quantités

$$x, \quad \frac{dx}{dy}, \quad \frac{d^2x}{dy^2}, \quad \text{etc.}$$

deviennent infinies par la supposition de $y=0$, et l'on en conclurait que le logarithme ne saurait se développer dans la forme

$$x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{etc.}$$

C'est aussi ce qu'il est facile de reconnaître *à priori*, en observant que la fonction x devient infinie lorsque $y=0$ (*Alg.* 251), ce qui ne résulte pas de la formule ci-dessus, qui se réduit alors à $x=A$.

Il n'en serait pas de même si l'on faisait $y = 1 + u$; car on trouverait, en prenant les logarithmes népériens,

$$x = l'(1+u), \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{1+u} = (1+u)^{-1}$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = -(1+u)^{-2}, \quad \frac{d^3x}{du^3} = 2(1+u)^{-3}, \text{ etc.}$$

faisant $u = 0$, on obtiendrait

$$l'(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \text{etc.}$$

et pour une base quelconque a, on aurait, en désignant par M le logarithme de e, pris sur cette base,

$$l(1+u) = M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^4}{5} - \text{etc.}\right\} (*).$$

29. La série du second membre n'est assez convergente (*Alg.* 236) pour être employée au Calcul des logarithmes, que lorsque u est une fraction; mais on a trouvé des moyens de la transformer en d'autres qui s'appliquent aux différens cas avec plus ou moins d'avantage. On a observé d'abord qu'en changeant $+u$ en $-u$, il venait

$$l(1-u) = M\left\{-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \frac{u^5}{5} - \text{etc.}\right\},$$

et retranchant cette équation de la précédente, on a trouvé

$$l(1+u) - l(1-u) = l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2M\left\{\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{etc.}\right\},$$

(*) On aura remarqué sans doute que l'équation $k = \frac{la}{le}$, du nº 25, jointe à l'expression du nº 23,

$$k = \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}$$

conduit à

$$la = le\left\{\frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.}\right\};$$

et en faisant $a = 1 + u$, on retrouvera le développement obtenu ci-dessus.

faisant ensuite $\frac{1+u}{1-u}=1+\frac{z}{n}$, ce qui donne $u=\frac{z}{2n+z}$, et observant que $l\left(1+\frac{z}{n}\right)=l\left(\frac{n+z}{n}\right)=l(n+z)-ln$, il en est résulté

$$l(n+z)-ln=2M\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{etc.}\right\};$$

d'où on a conclu

$$l(n+z)=ln+2M\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{etc.}\right\}.$$

Cette série, qui fait connaître le logarithme de $n+z$, lorsqu'on a celui de n, donne, en y supposant $n=1$ et $z=1$,

$$l2=2M\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\text{etc.}\right\},$$

puisque $l1=0$. Elle est déjà très-convergente et le devient encore plus pour un nombre plus grand. Si on prend $M=1$, on trouve $l'2=0{,}6931472$.

Le module M s'obtient en calculant le logarithme d'un même nombre dans le système qu'on veut adopter, et dans le système népérien, et en prenant le rapport des deux résultats (27). On arrive assez promptement au module des logarithmes ordinaires, en calculant d'abord le logarithme népérien de 5 par celui de 4, qu'on déduit de celui de 2, puisque $l4=2l2$; puis connaissant $l'5$ et $l'2$, on a $l'10=l'5+l'2$, et divisant par ce dernier, l'unité qui est le logarithme ordinaire de 10, on obtient le module cherché: on trouve

$$M=0{,}434294482.$$

Tel est le nombre par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour obtenir les logarithmes ordinaires (ou de Briggs).

Réciproquement, pour revenir aux logarithmes Népériens, il faut diviser les logarithmes ordinaires par ce nombre, ou les multiplier par le nombre

$$\frac{1}{0,434294482}=2,302585093.$$

30. Je vais donner quelques exemples de l'application des règles de la differentiation des fonctions logarithmiques; mais pour plus de simplicité je supposerai dorénavant que les logarithmes sont Népériens, à moins que je n'avertisse spécialement du contraire.

Soit 1°. $u=\mathrm{l}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$, en faisant $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=z$,

on aura $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}z}{z}$; mais

$$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}x\sqrt{a^2+x^2}-\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2}=\frac{a^2\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc $\mathrm{d}u=\frac{a^2\mathrm{d}x}{x(a^2+x^2)}$.

2°. $u=\mathrm{l}\left\{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right\}$; on fera

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=y,\quad \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=z,$$

ce qui donnera

$$u=\mathrm{l}\left(\frac{y}{z}\right)=\mathrm{l}y-\mathrm{l}z,\qquad \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}y}{y}-\frac{\mathrm{d}z}{z};$$

mais on a

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\}$$
$$= -\frac{zdx}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$dz = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}\{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\}$$
$$= \frac{ydx}{2\sqrt{1-x^2}},$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{zdx}{2y\sqrt{1-x^2}} - \frac{ydx}{2z\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{-(y^2+z^2)dx}{2yz\sqrt{1-x^2}};$$

et en observant que

$$y^2 + z^2 = 4, \qquad yz = 2x,$$

on trouvera enfin $du = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Cet exemple est remarquable par les réductions qu'éprouve la différentielle, et par sa simplicité, eu égard à la fonction dont elle dérive ; il sera facile maintenant d'effectuer le calcul des exemples suivans, dont je ne rapporterai que les résultats.

3°. $u = l\{x + \sqrt{1+x^2}\}$; $\qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

4°. $u = \frac{1}{\sqrt{-1}} l\{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\}$; $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5°. $u = l\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right\}^{\frac{1}{2}}$; $\qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

6°. Si on avait $u=(\mathrm{l}x)^n$, en faisant $\mathrm{l}x=z$, on trouverait

$$(\mathrm{l}x)^n=z^n,\qquad \mathrm{d}.z^n=nz^{n-1}\mathrm{d}z;$$

et remettant au lieu de z et de $\mathrm{d}z$, leurs valeurs, il viendrait

$$\mathrm{d}.(\mathrm{l}x)^n=n(\mathrm{l}x)^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

7°. Soit enfin $u=\mathrm{l}.\mathrm{l}x$, c'est-à-dire, le logarithme du logarithme de x; posant comme ci-dessus $\mathrm{l}x=z$, on aura d'abord

$$u=\mathrm{l}z,\qquad \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}z}{z},\qquad \mathrm{d}z=\mathrm{d}.\mathrm{l}x=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

d'où on déduira ensuite $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{l}x}$.

31. La considération des logarithmes facilite beaucoup la différentiation des formules exponentielles, lorsqu'elles sont compliquées.

1°. Soit, par exemple, $u=z^y$, z et y étant deux fonctions quelconques de x; en prenant le logarithme de chaque membre, on aura $\mathrm{l}u=y\mathrm{l}z$, et différentiant ensuite, on obtiendra

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=\mathrm{d}y\mathrm{l}z+y\mathrm{d}.\mathrm{l}z\ (11,\ 27),\ \text{ou}$$
$$=\mathrm{d}y\mathrm{l}z+y\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

et de là

$$\mathrm{d}u=u\left(\mathrm{d}y\mathrm{l}z+y\frac{\mathrm{d}z}{z}\right),\qquad \mathrm{d}.z^y=z^y\left(\mathrm{d}y\mathrm{l}z+y\frac{\mathrm{d}z}{z}\right).$$

2°. Soit $u=a^{b^x}$: on fera $b^x=y$, et on aura

$$u=a^y,\qquad \mathrm{d}u=a^y\mathrm{d}y\mathrm{l}a\ (27);$$

mais $dy = d.b^x = b^x dx lb$: donc

$$du = a^{b^x} b^x dx la lb.$$

3°. Soit $u = z^{t^s}$, z, t et s, étant des fonctions de x; on fera $t^s = y$, il viendra

$$u = z^y, \quad du = z^y\left(dy lz + \frac{y dz}{z}\right);$$

$$dy = t^s\left(ds lt + \frac{s dt}{t}\right),$$

et parconséquent

$$du = z^{t^s} t^s\left(ds lt lz + \frac{s dt lz}{t} + \frac{dz}{z}\right).$$

Au moyen de ces formules, on trouvera facilement la différentielle d'une fonction exponentielle quelconque.

32. Les sinus, les cosinus, les tangentes et les autres lignes trigonométriques, considérées par rapport à l'arc de cercle dont elles dépendent, sont aussi des fonctions transcendantes; on les nomme assez ordinairement *fonctions circulaires*. Je supposerai, pour plus de simplicité, que le rayon soit égal à l'unité.

En substituant $x + dx$, pour x, dans la fonction $\sin x$, il vient (*Trig.* 11)

$$\sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx,$$

d'où l'on tire, pour la différence,

$$\begin{aligned} \sin(x + dx) - \sin x &= \\ \sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x &= \\ \sin x(\cos dx - 1) + \cos x \sin dx. \end{aligned}$$

Il faudrait maintenant développer, suivant les puissances de l'accroissement dx, le dernier membre de

cette équation ; mais on peut obtenir sans cela à la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, ainsi qu'on va le voir. En prenant le rapport de ces accroissemens, on trouvera

$$\frac{\sin(x+dx)-\sin x}{dx}=\sin x\frac{(\cos dx-1)}{dx}+\cos x\frac{\sin dx}{dx};$$

si l'on fait attention que

$$(\sin dx)^2=1-(\cos dx)^2=$$
$$(1+\cos dx)(1-\cos dx),$$

et que parconséquent

$$1-\cos dx=\frac{(\sin dx)^2}{1+\cos dx},$$

on aura

$$\frac{\sin(x+dx)-\sin x}{dx}=-\sin x\frac{\sin dx}{1+\cos dx}\frac{\sin dx}{dx}+\cos x\frac{\sin dx}{dx}$$
$$=\left(-\sin x\frac{\sin dx}{1+\cos dx}+\cos x\right)\frac{\sin dx}{dx}.$$

On passera aux limites en cherchant ce que deviennent les deux facteurs du second membre lorsque l'accroissement dx s'évanouit (8). Dans ce cas, $\sin dx=0$, $\cos dx=1$, et le premier facteur se réduit à $\cos x$.

Le facteur $\frac{\sin dx}{dx}$ tend sans cesse vers l'unité ; car de $\tang A=\frac{\sin A}{\cos A}$, on déduit $\frac{\sin A}{\tang A}=\cos A$; et puisque $\cos A=1$, lorsque $A=0$, l'unité sera la limite du rapport entre le sinus et la tangente quand l'arc s'évanouit : or il est visible que l'arc étant moindre que la tangente, et plus grand que le sinus, à plus forte

raison son rapport avec le sinus tend sans cesse vers l'unité.

On aura donc, en vertu de ces remarques,

$$\frac{\mathrm{d}.\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x, \quad \text{ou } \mathrm{d}.\sin x = \mathrm{d}x \cos x.$$

33. Cette différentielle obtenue, les autres s'en déduisent sans peine; car on a

1°. $\cos x = \sin(1^q - x)$, $\mathrm{d}.\cos x = \mathrm{d}.\sin(1^q - x)$;

mais, par ce qui précède,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}.\sin(1^q - x) &= \mathrm{d}(1^q - x)\cos(1^q - x) \\ &= -\mathrm{d}x \cos(1^q - x); \end{aligned}$$

et $\cos(1^q - x) = \sin x$; donc

$$\mathrm{d}.\cos = -\mathrm{d}x \sin x.$$

2°. Puisque $\sin \text{vers}.\, x = 1 - \cos x$, on aura

$$\mathrm{d}.\sin \text{vers}.\, x = -\mathrm{d}.\cos x = \mathrm{d}x \sin x.$$

3°. $\tan g\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}.\tan g\, x &= \frac{\cos x \mathrm{d}.\sin x - \sin x \mathrm{d}.\cos x}{\cos x^2} \quad (12) \\ &= \frac{(\cos x^2 + \sin x^2)\mathrm{d}x}{\cos x^2}; \end{aligned}$$

mais $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$: donc

$$\mathrm{d}.\tan g\, x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos x^2}.$$

4°. $\cot x = \dfrac{1}{\tan g\, x}$,

$$\mathrm{d}.\cot x = -\frac{\mathrm{d}.\tan g x}{\tan g x^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{\tan g x^2 \cos x^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin x^2},$$

en mettant pour tang x sa valeur.

5°. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$,

$$d.\sec x = -\frac{d.\cos x}{\cos x^2} = \frac{dx \sin x}{\cos x^2} = dx \tan g\, x \sec x,$$

puisque $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan g\, x$ et $\frac{1}{\cos x} = \sec x$.

6°. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$,

$$d.\operatorname{cosec} x = -\frac{d.\sin x}{\sin x^2} = -\frac{dx \cos x}{\sin x^2} = -dx \cot x \operatorname{cosec} x.$$

34. Avec ces formules, on peut trouver la différentielle de toute expression renfermant des sinus, cosinus, tangentes, etc. il faudra pour cela différentier en regardant ces quantités comme des fonctions particulières, et mettre au lieu de leurs différentielles les résultats ci-dessus : je n'en donnerai qu'un seul exemple, savoir, $u = \cos x^{\sin x}$. On fera

$$\cos x = z, \qquad \sin x = y;$$

on aura $u = z^y$ et

$$du = d.z^y = z^y \left(dylz + \frac{ydz}{z}\right) (31)$$
$$= dx \cos x^{\sin x} \left(\cos xl.\cos x - \frac{\sin x^2}{\cos x}\right).$$

35. Après avoir traité les sinus, cosinus, etc. comme des fonctions de l'arc, il convient de regarder l'arc successivement comme une fonctionde son sinus, de son cosinus, etc. et d'en déterminer la différentielle sous ces divers points de vue. Pour cela, soit x la fonction proposée, et u la variable dont cette fonction dépend ; 1°. l'équation $d.\sin x = dx \cos x$, à cause

de $\sin x = u$ et $\cos x = \sqrt{1-u^2}$, donne $du = dx\sqrt{1-u^2}$, et parconséquent (9) $dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$: telle est la valeur de la différentielle de l'arc exprimée par le sinus et par sa différentielle.

Si on voulait exprimer la différentielle de l'arc par son cosinus, il faudrait partir de l'équation

$$d.\cos x = -dx \sin x,$$

qui donne, en faisant $\cos x = u$,

$$du = -dx\sqrt{1-u^2} \quad \text{ou} \quad dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Pour passer de là au sinus verse, on ferait $u = 1 - y$, puisque $\cos x = 1 - \sin\text{ver}.x$; on aurait parconséquent $du = -dy$ et $dx = \frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}}$.

2°. Soit $\tan x = u$; l'équation $d.\tan x = \frac{dx}{\cos x^2}$ donne $du = \frac{dx}{\cos x^2}$ et $dx = du \cos x^2$. A cause de $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$, on trouve

$$\sin x = \cos x \tan x, \quad \sin x^2 = \tan x^2 \cos x^2;$$

et substituant $1 - \cos x^2$ à $\sin x^2$, il vient

$$1 = \cos x^2 + \tan x^2 \cos x^2 = \cos x^2 (1 + \tan x^2):$$

on a donc

$$\cos x^2 = \frac{1}{1 + \tan x^2} = \frac{1}{1+u^2}.$$

Mettant cette valeur dans celle de dx, il en résultera

$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$, d'où on peut conclure que *la différentielle de l'arc est égale à celle de la tangente divisée par le quarré de la sécante;* car $\sqrt{1+u^2}$ exprime la sécante lorsque la tangente est représentée par u.

Je terminerai cet article par l'exemple suivant :

Soit x un arc ayant pour sinus la fonction $2u\sqrt{1+u^2}$, on fera

$$2u\sqrt{1-u^2} = z,$$

et on aura

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}};$$

mais $$\mathrm{d}z = \frac{2\mathrm{d}u\,(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}},$$

et $$\sqrt{1-z^2} = 1-2u^2,$$

donc $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.

36. On peut, par le moyen des expressions différentielles obtenues précédemment, former les développemens des principales fonctions circulaires.

1°. Pour $\sin x$, on a

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = -\sin x$, $\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3} = -\cos x$, $\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4} = \sin x$, etc.

faisant $x = 0$, il viendra, par le n° 19, $U = 0$, et

$U' = 1$, $U'' = 0$, $U''' = -1$, $U'''' = 0$, etc.

d'où on conclura

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

2°. On trouvera pour $\cos x$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\cos x, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = \sin x,$$
$$\frac{d^4u}{dx^4} = \cos x, \text{ etc.}$$

faisant $x = 0$, il en résultera $U = 1$, et

$$U' = 0, \quad U'' = -1, \quad U''' = 0, \quad U'''' = 1, \text{ etc.}$$

ce qui donnera

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Ces deux formules, dont la loi est très-évidente et très-simple, offrent une des méthodes les plus exactes et les plus expéditives pour calculer le sinus et le cosinus, correspondans à un arc donné, surtout lorsque cet arc n'est pas très-grand. On en trouvera d'analogues pour la tangente et les autres lignes trigonométriques; mais la loi de ces dernières formules n'est pas aussi simple que celle des précédentes, et elles sont beaucoup moins commodes dans l'application que les relations qui donnent la tangente, la sécante, etc. par le moyen du sinus et du cosinus; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

37. Si on représente par y un arc de cercle dont le sinus soit x, on aura (35)

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui conduira au développement de l'arc suivant les puissances du sinus. En effet, on en tirera

$$\frac{dy}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 3.3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3.5x^3(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 3.3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 2.5.9x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} + 3.5.7x^4(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}$$

etc.

En faisant $x=0$, et observant que dans cette hypothèse l'arc y est nul, on trouvera

$$y = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3.3x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Je passe à la recherche de l'arc par sa tangente; en nommant y l'arc et x sa tangente, on a (35) $dy = \frac{dx}{1+x^2}$, d'où il suit

$$\frac{dy}{dx} = (1+x^2)^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2x(1+x^2)^{-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 24x(1+x^2)^{-3} - 48x^3(1+x^2)^{-4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 24(1+x^2)^{-3} - 288x^2(1+x^2)^{-4} + 384x^4(1+x^2)^{-5}$$

etc.

et en faisant $x=0$, on trouve

$$y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\text{etc.}$$

La loi se manifeste ici dès les premiers termes; il n'en est pas de même à l'égard de la série précédente; mais comme les différentielles successives de y se compliquent de plus en plus, à cause de leurs dénominateurs, le procédé employé ci-dessus n'est pas le plus propre à conduire aux développemens cherchés; le Calcul intégral en fournira de plus commodes.

Le dernier de ces développemens donne une expression remarquable de l'arc $0^q,5$, dont la tangente est, comme on sait, égale à 1; en effet, si on suppose $x=1$, il vient

$$0^q,5=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\text{etc.}$$

Cette série est trop peu convergente pour être employée, mais on peut calculer le même arc en plusieurs parties; et la tangente de chacune étant plus petite que l'unité, on aura des séries convergentes. Le Géomètre anglais Machin a trouvé que l'arc de $0^q,5$ est égal à quatre fois celui qui a pour tangente $\frac{1}{5}$, moins l'arc dont la tangente est $\frac{1}{239}$, ce dont il est aisé de s'assurer en observant que si tang $a=\frac{1}{5}$, il en résulte (Trig. 26)

$$\text{tang } 2a=\frac{2\text{ tang } a}{1-\text{tang } a^2}=\frac{5}{12},$$

$$\text{tang } 4a=\frac{2\text{ tang } 2a}{1-(\text{tang } 2a)^2}=\frac{120}{119}.$$

Le dernier nombre, un peu plus fort que l'unité, tangente de $0^q,5$, montre que $4a>0^q,5$: faisant donc

$$4a=A,\qquad 0^q,5=B,$$

la différence $4a - 90°, 5$ ou $A - B$, a pour tangente

$$\text{tang}\,(A-B) = \text{tang}\,b = \frac{\text{tang}\,A - \text{tang}\,B}{1+\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B} = \frac{1}{239};$$

et comme $B = A - (A - B)$, il vient $90°, 5 = 4a - b$.
Or en prenant successivement $x = \frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{239}$, on trouve

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.(239)^3} + \frac{1}{5.(239)^5} - \frac{1}{7.(239)^6} + \text{ etc.}$$

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \text{ etc.}$$

d'où on conclut

$$90°, 5 = \left\{ \begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \text{ etc.}\right) \\ \left(-\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} + \text{ etc.}\right) \end{array} \right\}.$$

De la différentiation des équations quelconques à deux variables.

38. Jusqu'ici je n'ai différentié que des *équations séparées*, c'est-à-dire, dans lesquelles la variable se trouvait seule dans un membre, et la fonction dans l'autre; telles sont les équations de la forme $X = Y$, Y étant une fonction de y, et X une fonction de x; mais le plus grand nombre des équations que l'on rencontre dans les recherches analytiques ne se présente pas ainsi : la variable et la fonction y sont souvent mêlées ou combinées entr'elles.

Lorsqu'on a une équation quelconque $V = 0$, entre x et y, son effet est de déterminer x par y, ou y par x, ensorte que l'une de ces quantités est fonction de l'autre. Si l'on conçoit pour un moment que l'on ait déterminé y par x, en substituant l'expression de y dans la quan-

tité V, celle-ci deviendra nécessairement un assemblage de fonctions de x seul, mais composé de termes qui se détruiront indépendamment d'aucune valeur de x, puisque cette variable doit rester indéterminée. Il suit de là que x recevant un accroissement quelconque h, y éprouvera un changement tel, que la fonction V demeurera nulle comme auparavant. Si donc on désigne par V' ce que devient en apparence l'expression V, il faudra que $V'=0$, d'où on conclura $V'-V=0$, puis

$$\frac{V'-V}{h}=0,$$

quel que soit l'accroissement ; et parconséquent, si l'expression $\frac{V'-V}{h}$ est susceptible d'une limite P, on doit avoir $P=0$ (*).

Mais puisque V se compose de x, et de y considéré comme fonction de x, cette limite peut s'obtenir en différentiant V avec l'attention d'y faire varier y et x, suivant les règles des numéros 10, 11, 12, 13, 15 ; et si l'on observe que $Pdx=dV$, on conclura de ce qui vient d'être dit, que l'équation $V=0$ entraîne l'équation

$$dV=0,$$

la première déterminant y, et la seconde dy.

(*) Pour concevoir nettement ceci, il suffit de voir qu'en général, si dans l'expression V on substitue $x+h$ au lieu de x, et $y+k$ au lieu de y, le résultat pourra se développer dans la forme

$$V+Mh+Nk+Ph^2+Qhk+Rk^2+Sh^3+\text{etc.}=0;$$

M, N, P, Q, R, S, etc. étant des quantités indépendantes de h et de k.

Cette équation, à cause de la proposée $V=0$, se réduit à

L'exemple suivant éclaircira ceci.

Soit l'équation

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0.$$

L'expression V est ici $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2$; si on la différentie, dans la supposition que y est une fonction de x, en l'égalant à zéro, on trouvera

$$2y\mathrm{d}y - 2mx\mathrm{d}y - 2my\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}x = 0,$$

ou $$y\mathrm{d}y - mx\mathrm{d}y - my\mathrm{d}x + x\mathrm{d}x = 0 \quad (1),$$

en supprimant le facteur commun 2; et faisant $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$, on aura pour déterminer p, l'équation

$$(y - mx)p - my + x = 0,$$

d'où on tirera

$$p = \frac{my - x}{y - mx}.$$

$$Mh + Nk + Ph^2 + Qhk + Rk^2 + Sh^3 + \text{etc.} = 0,$$

et donne la relation des quantités h et k.

Lorsqu'on y fait $k = \varpi h$, elle acquiert un facteur h dans tous ses termes; et en le supprimant il viendra

$$M + N\varpi + Ph + Q\varpi h + R\varpi^2 h + Sh^2 + \text{etc.} = 0.$$

Le rapport ϖ changera à mesure que h diminuera, mais sans s'évanouir en même temps que cette quantité; et l'on aura pour déterminer ϖ, dans l'hypothèse de $h = 0$, l'équation

$$M + N\varpi = 0.$$

La valeur de ϖ qui en résultera sera la limite de toutes les valeurs que cette quantité peut prendre à raison de celles de h; il est donc évident que si on désigne cette limite par p, l'équation

$$M + Np = 0$$

sera vraie en toute rigueur.

Il est visible, par le procédé dont on vient de faire usage, que l'expression $M + Np$ est le coëfficient différentiel de la fonction V, pris en y regardant y comme une fonction de x.

Pour obtenir p en x seul, il faudrait substituer dans cette expression la valeur de y, qui dans l'équation proposée est

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2};$$

et il viendrait

$$p = \frac{-x + m^2x \pm m\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}$$

$$= m \pm \frac{-x + m^2x}{\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}},$$

résultat semblable à celui qu'on déduirait immédiatement de l'équation séparée

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2},$$

correspondante à la proposée.

39. L'équation

$$(y - mx)p - my + x = 0,$$

étant différentiée, en y considérant y et p comme des fonctions de x, conduit à l'équation

$$(dy - mdx)p + (y - mx)dp - mdy + dx = 0;$$

et si l'on fait

$$dy = pdx, \qquad dp = qdx,$$

il vient

$$(p - m)p + (y - mx)q - mp + 1 = 0,$$

équation qui donne la relation que le coefficient différentiel du second ordre q, ou $\frac{d^2y}{dx^2}$ (17), doit avoir avec celui du premier ordre p, ou $\frac{dy}{dx}$, et avec les variables x et y.

En

En continuant de différentier de la même manière, on formerait l'équation de laquelle dépend le coefficient différentiel du troisième ordre, et ainsi de suite.

40. Si l'on fait attention que $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, et que $d^2y = d(dy)$, on reconnaîtra que l'équation

$$(p-m)p + (y-mx)q - mp + 1 = 0,$$

se déduit immédiatement de l'équation

$$ydy - mxdy - mydx + xdx = 0 \quad (1),$$

lorsqu'on la différentie en y faisant varier dy, comme une fonction de x, et divisant ensuite par dx^2. En effet, on a premièrement

$$dy^2 + yd^2y - 2mdxdy - mxd^2y + dx^2 = 0 \quad (2);$$

secondement

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + 1 + (y-mx)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

équation qui, lorsqu'on y change $\frac{dy}{dx}$ en p, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en q, s'accorde avec celle que j'ai obtenue plus haut pour déterminer q.

En général, faire varier les quantités p, q, etc. comme des fonctions de x, c'est prendre les différentielles des expressions équivalentes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, différentielles qui sont respectivement représentées par $\frac{d^2y}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^2}$, etc. c'est enfin regarder les quantités dy, d^2y, etc. comme des fonctions de x.

L'équation (1) est *la différentielle première* de la proposée ; l'équation (2) en est *la différentielle seconde*, etc.

et d'après la remarque ci-dessus, *les différentielles d'une équation* PRIMITIVE *proposée, se déduisent les unes des autres par la différentiation, en regardant* y, dy, d²y, *etc. comme des fonctions de* x.

On passe aux équations qui donnent les coefficiens différentiels, en observant que ces coefficiens sont représentés par

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \text{etc.}$$

ou en faisant

$$dy = p\,dx, \qquad d^2y = q\,dx^2,\ \text{etc.}$$

Par ces dernières substitutions, les différentielles disparaissent, et il ne reste dans les résultats que les fonctions p, q, etc. absolument indépendantes de la valeur de l'accroissement dx.

41. L'équation

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$$

étant du second degré, donne pour y deux valeurs, par le moyen desquelles l'équation

$$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0 \qquad (1),$$

d'où on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

donne aussi pour le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, deux valeurs correspondantes à celles de la fonction y.

Si au lieu de résoudre l'équation proposée pour en tirer la valeur de y, on avait éliminé cette variable, entre les deux équations

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0,$$
$$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0 \qquad (1),$$

on aurait eu d'abord, en vertu de la seconde,

$$y = \frac{x(mdy - dx)}{dy - mdx};$$

substituant dans la première, il serait venu, après les réductions,

$$(x^2 - a^2 - m^2x^2)\,dy^2 - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)\,dxdy$$
$$+ (x^2 - m^2x^2 - a^2m^2)\,dx^2 = 0.$$

Cette dernière étant résolue par rapport à dy, donnerait les mêmes résultats que ceux qu'on obtiendrait en différentiant les valeurs de y; et après l'avoir divisée par dx^2, on en tirerait immédiatement les valeurs du coefficient différentiel. On aurait alors

$$(x^2 - a^2 - m^2x^2)\frac{dy^2}{dx^2} - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)\frac{dy}{dx}$$
$$+ x^2 - m^2x^2 - a^2m^2 = 0;$$

et en dégageant la seconde puissance du coefficient différentiel, exprimée par $\frac{dy^2}{dx^2}$, il viendrait

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - m^2x^2 - a^2m^2}{x^2 - a^2 - m^2x^2} = 0.$$

42. Il est facile d'appliquer ce qui précède, à des exemples plus compliqués, ou dans lesquels les variables montent à un degré plus élevé. Soit encore l'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

la différentiation donnera

$$3y^2dy - 3axdy - 3aydx + 3x^2dx = 0,$$

ou, en supprimant le facteur commun 3,

$$y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0, \qquad (1),$$

et parconséquent $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

La fonction y, dans cet exemple, étant donnée par une équation du troisième degré, doit avoir trois valeurs; et en les substituant successivement dans l'expression de $\frac{dy}{dx}$, on obtiendra un pareil nombre de valeurs pour le coefficient différentiel. On voit en général que ce coefficient aura toujours un nombre de valeurs égal à celui dont la fonction y est susceptible dans l'équation proposée : il en sera de même à l'égard de la différentielle.

Si on éliminait y entre les deux équations

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$
$$y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \qquad (1),$$

on aurait pour résultat une équation du troisième degré par rapport à dy, qui renfermerait les trois valeurs dont cette différentielle est susceptible.

Ayant trouvé l'expression de dy ou celle de $\frac{dy}{dx}$, on parviendra à celles de d^2y et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, en différentiant par rapport à dy, à y et à x, suivant la règle établie n° 40, l'équation

$$y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \qquad (1),$$

différentielle première de la proposée. En opérant ainsi, on aura

$$y^2d^2y - axd^2y + 2ydy^2 - adydx - adxdy + 2xdx^2 = 0;$$

et en réduisant il viendra

$$(y^2 - ax)\,d^2y + 2ydy^2 - 2adxdy + 2xdx^2 = 0 \qquad (2).$$

Voilà la différentielle seconde de l'équation proposée; si on la combine avec la différentielle première, on pourra éliminer dy, et le résultat donnera l'expression de d^2y en x, dx et y. On chassera, si on veut, la fonction y, au moyen de l'équation proposée.

En divisant l'équation (2) par dx^2, elle prend la forme

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

et ne renferme plus que les coefficiens différentiels $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{dy}{dx}$. Mettant au lieu de $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, tirée de (1), il viendra

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ 2y\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right)^2 - 2a\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right) + 2x = 0.$$

et en réduisant au même dénominateur,

$$(y^2 - ax)^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y + 2a^3xy = 0;$$

mais la quantité

$$2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y,$$

n'est autre chose que

$$2xy\,(y^3 - 3axy + x^3):$$

elle est donc nulle en vertu de l'équation proposée, et

parconséquent on a

$$(y^2 - ax)^3 \frac{d^2y}{dx^2} + 2a^3xy = 0,$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

En différentiant (2) par rapport à d^2y, dy, y et x, on formera la différentielle troisième de l'équation proposée, et on en tirera la valeur de d^3y, lorsqu'on aura éliminé d^2y et dy à l'aide des équations (1) et (2); divisant le résultat par dx^3, on aura l'expression du coefficient $\frac{d^3y}{dx^3}$. En continuant ainsi on parviendra aux différentielles ultérieures.

43. La remarque du n° 7, sur les constantes qui disparaissent par la différentiation des fonctions, s'applique également aux équations. Si on avait, par exemple, $y^2 = ax + b$, la différentielle $2ydy = adx$, étant indépendante de b, appartiendrait à chacune des équations particulières qui résultent de la proposée, en donnant à b toutes les valeurs possibles.

Mais on peut aussi parvenir, dans le cas actuel, à une équation indépendante de a, quoique la différentiation n'ait point fait disparaître cette constante : il suffit pour cela d'éliminer a entre les deux équations

$$y^2 = ax + b, \qquad 2ydy = adx;$$

et on trouvera

$$y^2dx = 2xydy + bdx.$$

Quoique cette dernière équation ne soit pas la différentielle immédiate de la proposée, elle en dérive cependant de manière qu'étant divisée par dx, elle exprime la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et le coefficient $\frac{dy}{dx}$, quel que soit a.

Si la constante qu'on élimine n'est pas au premier degré dans l'équation proposée, le résultat qu'on obtiendra renfermera des puissances de dy et de dx supérieures à la première; en voici un exemple :

$$y^2-2ay+x^2=a^2.$$

En différentiant on trouvera

$$y\mathrm{d}y-a\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x=0,$$

d'où $$a=\frac{y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y};$$

et substituant dans la proposée, il viendra, après avoir ordonné par rapport à dy et divisé par dx^2,

$$(x^2-2y^2)\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}-4xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x^2=0:$$

telle est la relation qui doit exister entre la variable x, la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, indépendamment d'aucune valeur particulière de la constante a.

En résolvant l'équation

$$y^2-2ay+x^2=a^2,$$

par rapport à a, on en aurait tiré

$$a=-y\pm\sqrt{2y^2+x^2};$$

et a se trouvant dégagé des variables x et y, la différentiation seule l'aurait fait disparaître : on aurait trouvé

$$-\mathrm{d}y\pm\frac{2y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x}{\sqrt{2y^2+x^2}}=0.$$

En faisant évanouir le radical, on s'assurera que cette équation est la même que celle qui résulte de l'élimination.

44. On peut faire disparaître autant de constantes qu'on voudra, en différentiant un nombre de fois égal à celui de ces constantes. Soit

$$y^2 = m(a^2 - x^2);$$

on aura d'abord

$$y\mathrm{d}y = -mx\mathrm{d}x;$$

différentiant de nouveau, on trouvera

$$y\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}y^2 = -m\mathrm{d}x^2;$$

substituant pour m sa valeur $\frac{-y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}$, tirée de l'équation précédente, et divisant par $\mathrm{d}x^2$, il viendra

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} - xy\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

résultat indépendant des constantes m et a.

45. La différentiation, combinée avec l'élimination, fournit le moyen de faire disparaître les fonctions irrationnelles. Soit par exemple

$$P^n = Q,$$

P et Q étant des fonctions quelconques de x et de y; en prenant la différentielle de cette équation, il viendra

$$nP^{n-1}\mathrm{d}P = \mathrm{d}Q, \quad \text{ou} \quad nP^n\mathrm{d}P = P\mathrm{d}Q,$$

en multipliant les deux membres par P; et si l'on met pour P^n sa valeur, on obtiendra

$$nQ\mathrm{d}P = P\mathrm{d}Q,$$

équation dans laquelle la quantité P est délivrée de l'exposant n.

On parvient au même résultat, en prenant le logarithme de chaque membre de l'équation proposée; on

a successivement

$$n\mathrm{l}P=\mathrm{l}Q\,,\quad n\,\frac{\mathrm{d}P}{P}=\frac{\mathrm{d}Q}{Q}\quad (27),$$

et parconséquent $nQ\mathrm{d}P=P\mathrm{d}Q$.

Cette remarque sert à développer, suivant les puissances de x, la fonction

$$(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.})^n,$$

quel que soit l'exposant n. Pour cela, soit

$$(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.})^n$$
$$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}$$

en passant aux logarithmes, il vient

$$n\mathrm{l}\,(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.})$$
$$=\mathrm{l}\,(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.});$$

différentiant ensuite, on obtient

$$\frac{n\,(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\text{etc.})\,\mathrm{d}x}{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.}}$$
$$=\frac{(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.})\,\mathrm{d}x}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}};$$

supprimant le facteur commun $\mathrm{d}x$, faisant disparaître les dénominateurs, et développant chaque membre par rapport aux puissances de x,

$$\left.\begin{array}{r} nbA+2ncAx+3ndAx^2+4neAx^3+\text{etc.}\\ +\;nbBx+2ncBx^2+3ndBx^3+\text{etc.}\\ +\;nbCx^2+2ncCx^3+\text{etc.}\\ +\;nbDx^3+\text{etc.}\end{array}\right\}=$$

$$\left.\begin{array}{r} aB+2aCx+3aDx^2+4aEx^3+\text{etc.}\\ +\;bBx+2bCx^2+3bDx^3+\text{etc.}\\ +\;cBx^2+2cCx^3+\text{etc.}\\ +\;dBx^3+\text{etc.}\end{array}\right\};$$

mais comme x doit rester indéterminé, il faut que les deux membres de cette équation deviennent identiques par les coefficiens mêmes de x, c'est-à-dire, que les coefficiens de la même puissance soient respectivement égaux dans chaque membre. Cette considération, déjà employée dans le nº 193 des Elémens d'Algèbre, fournit les équations suivantes :

$$nbA = aB$$
$$2ncA + nbB = 2aC + bB$$
$$3ndA + 2ncB + nbC = 3aD + 2bC + cB,$$
etc.

dont on tirera les valeurs des coefficiens B, C, D, etc. Le coefficient A semble demeurer indéterminé, cependant on en trouve la valeur en faisant $x = 0$ dans l'équation

$$(a + bx + \text{etc.})^n = A + Bx + \text{etc.}$$

qui par cette hypothèse se réduit à

$$a^n = A.$$

Substituant cette expression dans les équations précédentes, on en conclut

$$B = \frac{n}{1} a^{n-1} b$$
$$C = na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2$$
$$D = na^{n-1}d + \frac{n(n-1)}{1.1} a^{n-2} bc + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3,$$
etc.

d'où $(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})^n =$

$$a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}bx + \left\{na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\right\}x^2$$
$$+\left\{na^{n-1}d + \frac{n(n-1)}{1.1}a^{n-2}bc + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3\right\}x^3$$
$+$ etc.

46. On peut faire disparaître aussi les transcendantes d'une équation, en la combinant avec ses différentielles. L'une des plus simples de ces fonctions est

$$\mathrm{l}(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.});$$

si on représente son développement par

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

et qu'on prenne la différentielle de l'équation

$$\mathrm{l}(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

on trouvera

$$\frac{b+2cx+3dx^2+\text{etc.}}{a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}}=B+2Cx+3Dx^2+\text{etc.}$$

et on déterminera les coefficiens A, B, C, D, etc. comme à l'ordinaire.

Soit encore pour exemple

$$\sin(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})$$
$$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}$$

en faisant, pour abréger

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}=u,$$
$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}=y,$$

il en résultera $y=\sin u$; et en différentiant il viendra $\mathrm{d}y=\mathrm{d}u\cos u$. On pourrait éliminer $\cos u$ au moyen de

l'équation $\cos u = \sqrt{1 - \sin u^2}$, qui donne

$\cos u = \sqrt{1 - y^2}$, et on aurait alors $dy = du\sqrt{1 - y^2}$;

mais il faudrait encore faire disparaître le radical dans cette équation. Pour éviter cet inconvénient, on différentiera une seconde fois l'équation $dy = du \cos u$, en se rappelant que u est une fonction de x, aussi bien que y; et il viendra $d^2y = d^2u \cos u - du^2 \sin u$: mettant pour $\sin u$ et $\cos u$, leurs valeurs y et $\frac{dy}{du}$, on aura

$$d^2y = \frac{dy}{du} d^2u - y du^2, \text{ ou } du d^2y - dy d^2u + y du^3 = 0.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à y, dy, d^2y, du, d^2u, du^3, leur valeur; or

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

donne

$$dy = (B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.})\,dx$$
$$d^2y = \quad (2C + 2.3Dx + \text{etc.})\,dx^2;$$

et pour ne pas m'engager dans de trop longs calculs, je réduirai la fonction proposée à $\sin(a + bx + cx^2)$, en faisant d, e, etc. $= 0$: dans ce cas particulier,

$$du = (b + 2cx)\,dx,$$
$$d^2u = 2c dx^2,$$
$$du^3 = (b^3 + 6b^2cx + 12bc^2x^2 + 8c^3x^3)\,dx^3.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation

$$du d^2y - dy d^2u + y du^3 = 0$$

devient divisible par dx^3; et en l'ordonnant par rapport à x, elle prend la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{r} 2bC + 6bDx + 12bEx^2 + \text{etc.} \\ + 4cCx + 12cDx^2 + \text{etc.} \\ + b^3A + 6b^2cAx + 12bc^2Ax^2 + \text{etc.} \\ + b^3Bx + 6b^2cBx^2 + \text{etc.} \\ + b^3Cx^2 + \text{etc.} \\ - 2cB - 4cCx - 6cDx^2 - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

En égalant à zéro les coefficiens de chaque puissance de x, on obtiendra les équations qui déterminent C, D, E, etc. à l'égard de A et B, il faut recourir aux équations

$$y = \sin u \text{ et } \frac{dy}{du} = \cos u.$$

Lorsque $x = 0$, il vient

$$u = a, \quad y = A, \quad du = b dx, \quad dy = B dx;$$

et il résulte de ces valeurs

$$A = \sin a, \quad B = b \cos a.$$

Recherche des maxima *et des* minima *des fonctions d'une seule variable.*

47. La recherche des plus grandes et des moindres valeurs dont est susceptible une fonction donnée, forme une des plus importantes applications analytiques du Calcul différentiel ; en voici les principes :

Lorsque la variable de laquelle dépend une fonction proposée passe successivement par tous les degrés de grandeur, il peut arriver que la série des valeurs que reçoit cette fonction, soit d'abord croissante, et devienne ensuite décroissante ; il y aura alors une de ces valeurs qui surpassera toutes les autres. Si au contraire la série des valeurs de la fonction proposée est d'abord décroissante, et devient ensuite croissante, on en rencontrera nécessairement une qui sera moindre que toutes les autres. Le terme où l'accroissement d'une

fonction s'arrête, s'appelle *Maximum*, et celui où elle cesse de décroître, *Minimum.*

Soit pour exemple la fonction $y=b-(x-a)^2$; en faisant $x=0$, on a $y=b-a^2$, et la quantité $(x-a)$ venant à décroître lorsque x augmente, y augmente aussi, jusqu'à ce qu'on ait $x=a$, d'où il résulte $y=b$ pour le *maximum;* mais passé ce terme, quoique x prenne de nouveaux accroissemens, y décroît, et devient nul, quand $(x-a)^2=b$. La marche de la fonction proposée est facile à suivre, et on peut d'ailleurs vérifier que la plus grande valeur de y répond à $x=a$, en substituant successivement $a+\delta$ et $a-\delta$ au lieu de x; on trouvera dans l'un et l'autre cas un résultat $y=b-\delta^2$, toujours moindre que b.

Soit encore $y=b+(x-a)^2$. Dans cet exemple, x étant nul, on a $y=b+a^2$; puis à mesure que x augmente, la quantité $(x-a)^2$ va en diminuant ainsi que y, jusqu'à ce que $x=a$; passé ce terme, $(x-a)^2$ augmente, et il en est de même de y dont le *minimum* répond parconséquent à la supposition de $x=a$: ce qu'on vérifie encore en substituant successivement $a-\delta$ et $a+\delta$ au lieu de x, puisqu'on trouve pour l'un et l'autre cas $y=b+\delta^2$, résultat toujours plus grand que b.

Toute fonction qui croît ou décroît sans cesse, lorsque la variable dont elle dépend croît, n'est snsceptible ni de *maximum* ni de *minimum*, puisqu'à une valeur quelconque il en succède toujours une plus grande ou une moindre.

Le caractère essentiel du maximum *consiste en ce que les valeurs qui le précèdent et qui le suivent immédiatement sont plus petites; le* minimum, *au contraire, est surpassé par les valeurs qui le précèdent et qui le suivent immédiatement.*

J'ai dit *immédiatement*, parcequ'il arrive souvent qu'une fonction a des valeurs qui surpassent son *maximum* ou qui sont moindres que son *minimum*, ou enfin qu'elle a plusieurs *maxima* et plusieurs *minima* inégaux entr'eux : tout cela est aisé à concevoir ; car si après avoir crû et décrû, par exemple, cette fonction vient à croître de nouveau et indéfiniment, elle finira par surpasser le *maximum* qu'elle a eu d'abord.

Au lieu d'être indéfini, si ce second accroissement s'arrêtait à un certain terme, il en naîtrait un nouveau *maximum* qui pourrait être différent du premier : on verra sans peine ce qui doit arriver, lorsque ces changemens se répètent et varient dans leurs quantités respectives. Je passe maintenant à la méthode dont on fait usage pour découvrir les *maxima* et *minima* des fonctions d'une seule variable.

48. Soit donc y une fonction quelconque de x, dans laquelle cette variable ait atteint la valeur qui donne le *maximum* ou le *minimum* ; il suit de ce qui précède que si on cherche les valeurs de y, correspondantes à $x-h$ et à $x+h$, on doit, quelque petite que soit la quantité h, obtenir des résultats moindres que le *maximum*, ou plus grands que le *minimum*. En désignant par $_{,}y$ la valeur de y, qui répond à $x-h$, et par y' celle qui répond à $x+h$, on aura, d'après le théorème de Taylor (21)

$$_{,}y=y-\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$y'=y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Les puissances d'une quantité moindre que l'unité devenant d'autant plus petites que leur exposant est

plus considérable, on conçoit facilement qu'il est toujours possible de prendre h assez petite pour que le terme $\frac{dy}{dx}h$ surpasse la somme de tous ceux qui le suivent; et ce terme entrant avec des signes différens dans les valeurs $,y$ et y', il en résulte qu'une des deux surpasse y, tandis que l'autre est moindre : la fonction proposée ne sera parconséquent ni un *maximum* ni un *minimum* tant que $\frac{dy}{dx}$ ne sera pas nul (*). Mais si ce coefficient s'évanouissait, comme il viendrait alors

$$,y=y+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$y'=y+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

on aurait en même temps $,y$ et $y'>y$, lorsque la valeur du coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ serait positive, ou bien $,y$ et $y'<y$ lorsque cette valeur serait négative : le premier cas donnerait y *minimum*, et le second y *maximum*. Il suit de là, que *pour trouver*

(*) Si on élevait quelque doute sur cette assertion, il suffirait, pour en reconnaître l'exactitude, d'observer qu'une série de la forme

$$Ah+Bh^2+Ch^3+Dh^4+\text{etc.}$$

peut s'écrire ainsi :

$$h\,[A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{etc.}],$$

et que la partie

$$Bh+Ch^2+Dh^3+\text{etc.}$$

qui s'anéantit lorsque $h=0$, peut parconséquent devenir moindre que la quantité A dont la valeur reste la même quelle que soit h.

quand

quand une fonction y *doit atteindre son* maximum *ou son* minimum (car l'un et l'autre sont donnés par la même équation) *il faut chercher l'expression du premier coefficient différentiel* $\frac{dy}{dx}$, *et l'égaler à zéro.*

Dans l'exemple $y = b - (x - a)^2$, rapporté ci-dessus, on a $\frac{dy}{dx} = -2(x-a)$; et en l'égalant à zéro, on trouve $x = a$. Pour savoir maintenant si cette valeur répond à un *maximum* ou à un *minimum*, on cherchera ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$; et comme il se réduit à -2, quantité négative, il s'ensuit que la supposition de $x = a$ donne le *maximum*.

En traitant de même la fonction

$$y = b + (x-a)^2,$$

on aurait encore trouvé $x = a$, mais $\frac{d^2y}{dx^2}$ serait devenu positif; c'est donc le *minimum* qui a lieu dans ce cas.

49. De ce qu'on doit avoir $\frac{dy}{dx} = 0$, dans le cas du *maximum* ou du *minimum*, il n'en faut pas conclure que l'un ou l'autre ont nécessairement lieu toutes les fois que cette condition est remplie. En effet, si la valeur de x, qui rend $\frac{dy}{dx}$ nul, faisait évanouir en même temps $\frac{d^2y}{dx^2}$, sans que $\frac{d^3y}{dx^3}$ disparût, comme on trouverait dans cette circonstance

$$,y = y - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$y' = y + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

et que le terme $\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}$ pourrait, au moyen d'une valeur convenable de h, surpasser la somme de tous ceux qui le suivent, il n'y aurait plus entre les trois quantités $\mathcal{y}, y, y'$, la subordination qui convient au *maximum* ou au *minimum*; la moyenne serait plus grande que l'une des extrêmes et moindre que l'autre : c'est ce qu'on peut voir sur la fonction $y = b + (x - a)^3$.

Mais si la valeur de x anéantissait $\frac{d^3y}{dx^3}$, il viendrait

$$\mathcal{y} = y + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$y' = y + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

les conditions du *maximum* ou du *minimum* seraient encore remplies, et on reconnaîtrait au signe de $\frac{d^4y}{dx^4}$, lequel des deux devrait avoir lieu. On trouverait de cette manière que la valeur $x = a$ donne un *maximum* pour la fonction $y = b - (x - a)^4$, et un *minimum* paur la fonction $y = b + (x - a)^4$.

Sans qu'il soit besoin de pousser plus loin ces considérations, on verra qu'en général il ne peut y avoir de *maximum* ou de *minimum*, que quand le premier des coefficiens différentiels qui ne s'évanouissent pas, est d'un ordre pair, et que ce coefficient doit être négatif lors du *maximum*, et positif lors du *minimum*.

Comme je dois revenir sur ce sujet à l'occasion de la théorie des courbes, je ne donnerai pour le moment que quelques applications.

50. Je suppose d'abord qu'il s'agisse de *partager une quantité* a *en deux parties, de manière que le produit de la puissance* m *de la première, par la puissance* n *de*

la seconde, soit le plus grand de tous les produits semblables qu'on pourrait former.

Soit x une des parties de a, l'autre sera $a-x$, et le produit dont on cherche le *maximum* étant représenté par y, on aura $y=x^m(a-x)^n$, d'où on tirera

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}(a-x)^n-nx^m(a-x)^{n-1}$$
$$=[ma-mx-nx]x^{m-1}(a-x)^{n-1};$$

et en égalant à zéro chacun des facteurs de ce résultat, on trouvera

$$x=\frac{ma}{m+n},\ x=0,\ x=a.$$

La première de ces valeurs répond à un *maximum*, car lorsqu'on la substitue dans l'expression générale de $\frac{d^2y}{dx^2}$, elle donne la quantité négative

$$-\frac{m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}:$$

les deux autres répondront à des *minima*, lorsque m et n seront pairs, comme on peut s'en assurer par l'examen des coefficiens différentiels, ou plus simplement encore, en faisant $x=\pm h$ et $x=a\pm h$. On trouvera toujours un résultat positif dans l'un et l'autre cas, quel que soit le signe qu'on donne à h; ce qui prouve que la fonction proposée après avoir décrû jusqu'à devenir nulle, ne passe point au négatif, mais qu'elle recommence à croître.

51. Je considérerai encore la fonction que y désigne dans l'équation

$$y^2-2mxy+x^2-a^2=0,$$

dont la différentielle est

$$(y-mx)dy-(my-x)dx=0\ (38);$$

il viendra

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{my-x}{y-mx},$$

d'où on tirera

$$my-x=0.$$

Pour obtenir la valeur de x, il faudra combiner cette dernière équation avec la proposée ; on aura par ce moyen

$$y=\frac{x}{m}, \qquad \frac{x^2}{m^2}-x^2-a^2=0,$$

d'où il résulte

$$x=\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}, \qquad y=\frac{a}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Il reste à examiner ce que devient le coefficient $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. La différentielle seconde de l'équation proposée donne la suivante :

$$(y-mx)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}-2m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=0,$$

que la supposition de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ réduit à

$$(y-mx)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+1=0,$$

et d'où on tire

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-m}{x(1-m^2)},$$

en mettant pour y sa valeur en x. Il faut encore substituer celle de x ; en le faisant on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sqrt{1-m^2}}:$$

ce résultat étant négatif, montre que la valeur de y, déterminée ci-dessus, est un *maximum*.

Des valeurs que prennent dans certains cas les coefficiens différentiels, et des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$.

52. Si on cherchait le *maximum* ou le *minimum* de la fonction $ay = \sqrt{a^2x^2 - x^4}$, par exemple, on en déduirait $a\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$; et en faisant $x = 0$, il viendrait $a\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Cependant avec un peu d'attention on verra que le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$ ne s'évanouissent en même temps que parcequ'ils sont affectés du facteur commun x. Si on les en délivre, on trouvera $a\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, et par-conséquent $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, lorsque $x = 0$.

En général, si on fait $x = a$ dans une expression de la forme $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ elle deviendra $\frac{0}{0}$; néanmoins sa vraie valeur doit être ou nulle, ou finie, ou infinie, selon qu'on aura $m > n$, $m = n$, $m < n$; car en effaçant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on trouvera $\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}$ dans le premier cas, $\frac{P}{Q}$ dans le second, et $\frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}$ dans le troisième, bien

entendu que les quantités P et Q ne deviendront ni nulles ni infinies par la supposition de $x=a$.

Lors donc qu'une expression quelconque se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, il faut, pour connaître sa vraie signification, la dégager des facteurs qui sont communs à son numérateur et à son dénominateur (*Alg.* 70) : la différentiation en fournit le moyen.

La différentielle de l'expression $P(x-a)$, dans laquelle P désigne une fonction quelconque de x, mais indépendante du facteur $x-a$, étant

$$(x-a)\text{d}P+P\text{d}x,$$

ne s'évanouit plus lorsque $x=a$.

Si l'on différentiait deux fois la fonction $P(x-a)^2$, on trouverait

$$(x-a)^2\text{d}P+2(x-a)P\text{d}x,$$
$$(x-a)^2\text{d}^2P+4(x-a)\text{d}P\text{d}x+1.2P\text{d}x^2;$$

et comme P ne contient pas $x-a$, la différentielle seconde se réduirait à son dernier terme. En poursuivant ainsi, il est facile de se convaincre que toutes les différentielles d'une expression de la forme $P(x-a)^m$, jusqu'à celle de l'ordre $m-1$ inclusivement, s'évanouissent dans la supposition de $x=a$, lorsque m est un nombre entier, et qu'alors la différentielle de l'ordre m se réduit à $1.2\ldots mP\text{d}x^m$: le facteur $(x-a)^m$ disparaît donc, dans cette hypothèse, après m différentiations.

Il n'est pas nécessaire qu'on connaisse l'exposant m, ni même que le facteur $(x-a)^m$ soit en évidence, pour savoir quand l'expression $P(x-a)^m$ en est délivrée ; il suffit de s'assurer, après chaque différentiation, si le résultat obtenu s'évanouit ou non, lorsqu'on met a à la

place de x : dans le dernier cas l'opération est finie, et ce qu'on a trouvé représente la quantité $1.2.....mPdx^m$. Soit, pour exemple, la fonction $x^3-ax^2-a^2x+a^3$, qui s'évanouit par la supposition de $x=a$; sa différentielle première s'évanouit aussi dans cette hypothèse, mais non pas sa différentielle seconde, qui est $(6x-2a)dx^2$. La voilà donc délivrée du facteur $(x-a)$; et puisqu'il a fallu pour cela deux différentiations, on en doit conclure qu'elle est de la forme $P(x-a)^2$, ce qui est d'ailleurs aisé à vérifier, car on trouvera

$$x^3-ax^2-a^2x+a^3=(x+a)(x-a)^2.$$

Cela posé, dans le cas où $m=n$, si on différentiait m fois successivement, tant le numérateur que le dénominateur de la fraction $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, ils seraient dégagés du facteur $x-a$, car on aurait, lorsque $x=a$,

$$\frac{d^m.P(x-a)^m}{d^m.Q(x-a)^m}=\frac{1.2...mPdx^m}{1.2...mQdx^m}=\frac{P}{Q}.$$

Si c'est le numérateur qui donne le premier un résultat qui ne s'évanouisse pas, ce sera une preuve que le facteur $(x-a)$ s'y trouve élevé à une puissance moindre que dans le dénominateur, et parconséquent la fraction proposée sera infinie; si c'est au contraire le dénominateur, la fraction proposée sera nulle. On peut donc énoncer la règle suivante : *Pour obtenir la vraie valeur d'une fonction qui devient $\frac{0}{0}$ lorsqu'on donne à* x *une valeur particulière, il faut différentier son numérateur et son dénominateur, jusqu'à ce qu'on trouve pour l'un ou pour l'autre un résultat qui ne s'évanouisse pas : la fonction proposée sera infinie dans le premier cas, nulle dans le second ; et elle aura une valeur finie, si on rencontre en même temps deux résultats qui ne s'anéantissent point.*

Quelques exemples éclairciront suffisamment ceci.

53. 1°. La formule $\frac{x^n-1}{x-1}$ qui exprime la somme des n premiers termes de la progression par quotiens $\div\div 1 : x : x^2 : x^3 :$ etc. devient $\frac{0}{0}$ quand $x=1$; cependant cette somme dans la progression $\div\div 1 : 1 : 1 : 1$, etc. à laquelle on est conduit alors, a une valeur déterminée, et égale à n, que la règle précédente va nous donner aussi. En effet, après avoir différentié le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{x^n-1}{x-1}$, on trouve $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}$, et en écrivant 1 au lieu de x, il vient n.

2°. La vraie valeur de $\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}$, dans le cas où $x=c$ ne peut s'obtenir qu'après deux différentiations, car la première donne $\frac{ax-ac}{bx-bc}$, résultat qui devient encore $\frac{0}{0}$; mais en le différentiant on trouve $\frac{a}{b}$.

3°. Si on cherche la valeur de la fraction

$$\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^2-a^2},$$

lorsque $x=a$, on trouvera, après avoir différentié une fois le numérateur et le dénominateur, que le premier seul devient encore nul quand on met a au lieu de x ; ce qui apprend que la vraie valeur de la fonction proposée est nulle. Le contraire aurait eu lieu pour la fonction

$$\frac{ax-x^2}{a^4-2a^3x+2ax^3-x^4}.$$

4°. Quoiqu'on ne voie pas tout de suite comment il

est possible de donner la forme $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ à la fonction transcendante $\frac{a^x-b^x}{x}$, qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x=0$, on peut néanmoins y appliquer la règle, et après avoir différentié son numérateur et son dénominateur, on trouve $a^x\text{l}a-b^x\text{l}b$: en mettant o pour x, on a $\text{l}a-\text{l}b$, pour la vraie valeur cherchée.

Ce résultat s'obtient tout de suite en substituant aux fonctions a^x et b^x leurs développemens (24, 25), car il vient

$$\frac{a^x-b^x}{x}=(\text{l}a-\text{l}b)+\{(\text{l}a)^2-(\text{l}b)^2\}\frac{x}{1.2}+\text{ etc.}$$

et la supposition de $x=0$ réduit le second membre de cette équation à son premier terme. En suivant l'opération, on remarquera qu'il y a un facteur x qui disparaît par la division.

5°. La fonction $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque l'arc $x=1^q$; mais en y appliquant la règle, on trouve que sa vraie valeur est alors 1.

6°. Le lecteur pourra s'exercer sur les fonctions

$$\frac{a-x-a\text{l}a+a\text{l}x}{a-\sqrt{2ax-x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{x^x-x}{1-x+\text{l}x};$$

la première devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, et la seconde lorsque $x=1$: leurs vraies valeurs sont respectivement -1 et -2.

54. La règle du nº 52 ne serait pas applicable au cas où les facteurs qui s'évanouissent seraient élevés à des puissances fractionnaires; car les différentiations suc-

cessives ne retranchant que des unités, de l'exposant m du facteur $x-a$, ne peuvent épuiser cet exposant lorsqu'il est fractionnaire : seulement il devient négatif quand le nombre des différentiations surpasse l'entier qui s'y trouvait contenu (13). Si on avait, par exemple, $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, quoique la vraie valeur de cette fraction, lorsque $x=a$, soit $(2a)^{\frac{3}{2}}$, on n'y parviendrait jamais par la différentiation : on trouverait successivement

$$\frac{3x\,(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}\,(x-a)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{3\,(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^2\,(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,(x-a)^{-\frac{1}{2}}}, \text{ etc.}$$

Le premier de ces résultats devient encore $\frac{0}{0}$, quand on fait $x=a$; et la même supposition rend infinis les numérateurs et les dénominateurs de chacun des suivans. Si on fait disparaître les exposans négatifs, en passant au dénominateur ceux qui se trouvent dans le numérateur, *et vice versâ*, les expressions nouvelles qui naîtront de ce changement se réduiront toutes à $\frac{0}{0}$.

55. Cette difficulté tient à ce que la différentielle d'une fonction de x ne peut être de la forme pdx, dans le cas où une valeur particulière de x fait disparaître une irrationnalité dans cette fonction.

Si l'on a $y=b+\sqrt{x-a}$, par exemple, et qu'on veuille, lorsque $x=a$, trouver la valeur consécutive à y, il faudra mettre $a+dx$, au lieu de x; il viendra

$$y'=b+\sqrt{dx},$$

et la différence sera

$$y'-y=\sqrt{dx}=dx^{\frac{1}{2}}.$$

Elle se réduit au seul terme $dx^{\frac{1}{2}}$, qui est parconséquent aussi la différentielle relative à ce cas ; et on en tire

$$\frac{y'-y}{dx}=\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}=\frac{1}{dx^{\frac{1}{2}}},$$

expression dont le dénominateur seul s'évanouit quand on fait $dx=0$, et de laquelle il résulte que le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ est infini pour la valeur particulière $x=a$.

Dans la suite, la considération des courbes éclaircira encore mieux cette espèce de paradoxe.

56. Voici un procédé général exempt de toute difficulté, qui comprend la règle du n° 52, et que je n'ai présenté le dernier que parcequ'il m'a semblé que les considérations du n° cité pouvaient jeter un grand jour sur cette matière.

Soit $\frac{X}{X'}$ une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent tous deux quand $x=a$; en substituant $a+h$, au lieu de x, les fonctions X et X' se développeront suivant des séries de la forme

$$Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\text{etc.} \qquad A'h^{\alpha'}+B'h^{\beta'}+\text{etc.}$$

et *ascendantes*, c'est-à-dire, dans lesquelles les exposans α, β, etc. iront en croissant et seront positifs, puisque ces séries doivent devenir nulles dans l'hypothèse de $h=0$, qui répond à celle de $x=a$; on aura donc

$$\frac{Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\text{etc.}}{A'h^{\alpha'}+B'h^{\beta'}+\text{etc.}},$$

au lieu de la fraction proposée. Si dans ce résultat on suppose $h=0$, on doit retomber sur la valeur que reçoit la fonction $\frac{X}{X'}$, lorsqu'on change x en a; et quoiqu'il semble d'abord se réduire à $\frac{0}{0}$, on va voir cependant qu'il a toujours une valeur déterminée.

En distinguant les trois cas $\alpha>\alpha'$, $\alpha=\alpha'$ et $\alpha<\alpha'$, on peut, dans les deux premiers, écrire ainsi qu'il suit l'expression précédente :

$$\frac{Ah^{\alpha-\alpha'}+Bh^{\beta-\alpha'}+\text{etc.}}{A'+B'h^{\beta'-\alpha'}+\text{etc.}}$$

Sous cette forme, il est aisé d'appercevoir que tant que α surpasse α', la supposition de $h=0$ rend la fraction nulle, et qu'elle se réduit à $\frac{A}{A'}$, lorsque $\alpha=\alpha'$. Dans le troisième cas, au contraire, où α est $<\alpha'$, on a

$$\frac{A+Bh^{\beta-\alpha}+\text{etc.}}{A'h^{\alpha'-\alpha}+B'h^{\beta'-\alpha}+\text{etc.}},$$

et ce résultat devient infini par la supposition de $h=0$. Dans tous ces cas, la vraie valeur qu'on cherche ne dépend que du premier terme de chaque série.

La règle suivante s'étend à toutes les fonctions qui peuvent se présenter sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: *cherchez le premier terme de chacune des séries ascendantes qui expriment le développement du numérateur et du dénominateur, lorsque* $x=a+h$; *réduisez à sa plus simple expression la nouvelle fraction formée de ces premiers termes, et faites ensuite* $h=0$: *les résultats que vous obtiendrez seront les différentes valeurs que prend la fraction proposée lorsqu'on fait* $x=a$.

La fraction $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$ dont on ne peut trouver la valeur par la différentiation, lorsque $x=a$ (54), devient par le procédé ci-dessus,

$$\frac{(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}=(2a+h)^{\frac{3}{2}},$$

en changeant x en $a+h$; et faisant $h=0$, on obtient la vraie valeur $(2a)^{\frac{3}{2}}$.

Le même procédé paraîtra quelquefois plus commode que la différentiation, dans le cas où elle peut s'employer. Ce n'est, par exemple, qu'après avoir différentié quatre fois de suite le numérateur et le dénominateur de la fraction

$$\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}},$$

qu'on parvient à en trouver la vraie valeur, dans le cas où $x=a$.

En écrivant $a+h$ au lieu de x, comme le prescrit la règle, il vient

$$\frac{2a^3+2a^2h-ah^2+h^3-2a^2\sqrt{a^2+2ah}}{-2a^2+h^2+2a\sqrt{a^2-h^2}};$$

réduisant en série les deux quantités radicales, on aura

$$\sqrt{a^2+2ah}=a+h-\frac{h^2}{2a}+\frac{h^3}{2a^2}-\frac{5h^4}{8a^3}+\text{ etc.}$$

$$\sqrt{a^2-h^2}=a-\frac{h^2}{2a}-\frac{h^4}{8a^3}-\text{ etc.}$$

La substitution de ces deux suites dans la fraction précédente donnera — $5a$ pour la vraie valeur cherchée.

57. Une fonction peut encore se présenter sous plusieurs formes indéterminées, différentes en apparence de $\frac{0}{0}$, mais qui, dans le fond, reviennent au même, et qu'il est bon de connaître.

1°. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{X}{X'}$ peuvent devenir infinis en même temps; mais cette fraction étant écrite ainsi: $\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$, se réduit à $\frac{0}{0}$, lorsque X et X' sont infinis.

2°. Il peut arriver qu'on rencontre un produit composé de deux facteurs, l'un infini et l'autre nul: soit PQ ce produit; si la supposition de $x=a$ donne $P=0$, $Q=\frac{b}{0}$, on observera que $PQ=\frac{P}{\frac{1}{Q}}$, et que $\frac{1}{Q}=0$, et il viendra

$$PQ=\frac{0}{0}\ (*).$$

(*) Le procédé du n° 56 présente quelques difficultés lorsqu'il s'agit de l'appliquer à des coefficiens différentiels donnés par une équation dans laquelle les variables x et y se trouvent mêlées. Il faut avoir recours à des moyens particuliers pour tirer de l'équation primitive proposée, une valeur de y développée et ordonnée suivant les puissances de h. (*Voyez* le Traité du Calc. diff. et du Calc. int.). Cependant quand cette équation est délivrée de radicaux, on peut parvenir à la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$, par les considérations indiquées dans la note de la page 46.

En effet, l'équation $M+Np=0$ donnant $p=-\frac{M}{N}$ conduit à

58. Si on demandait la valeur que reçoit la fonction $\frac{lx}{x^n}$ quand x est infini, ou, ce qui est la même chose, la limite de cette fonction, on ne pourrait y parvenir par aucun des procédés dont nous avons fait usage jusqu'à présent, à cause de l'impossibilité de réduire lx en série, et il faudrait recourir aux considérations particulières à la nature de la fonction proposée lx.

En changeant x en n et a en x dans le développement de a^x (24), on aura

$$x^n = 1 + \frac{nlx}{1} + \frac{n^2(lx)^2}{1.2} + \frac{n^3(lx)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

d'où l'on conclura

$p = \frac{0}{0}$, lorsque les quantités M et N s'évanouissent en même temps; mais dans ce cas le développement complet d'où cette équation est tirée,

$$Mh + N\varpi h + Ph^2 + Q\varpi h^2 + R\varpi^2 h^2 + Sh^3 + \text{etc.} = 0,$$

se réduit à

$$Ph^2 + Q\varpi h^2 + R\varpi^2 h^2 + Sh^3 + \text{etc.} = 0,$$

et devient divisiblepar h^2; puis passant aux limites, en faisant $h=0$, et changeant ϖ en p, on obtient

$$P + Qp + Rp^2 = 0:$$

on trouve donc dans ce cas deux valeurs de p.

Si les valeurs de x et de y, qui font disparaître les quantités M et N, anéantissaient aussi les quantités P, Q et R, il faudrait recourir aux termes où l'accroissement h monte au troisième degré, pour obtenir p, qui aurait alors trois valeurs. On verra dans la suite comment les quantités P, Q, R, etc. qu'on peut calculer *à priori*, en effectuant la substitution indiquée dans la note de la page 49, se forment aussi par des différentiations.

$$\frac{\mathrm{l}x}{x^n}=\frac{\mathrm{l}x}{1+\frac{n\mathrm{l}x}{1}+\frac{n^2(\mathrm{l}x)^2}{1.2}+\frac{n^3(\mathrm{l}x)^3}{1.2.3}+\text{etc.}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{l}x}+n+\frac{n^2\mathrm{l}x}{1.2}+\frac{n^3(\mathrm{l}x)^2}{1.2.3}+\text{etc.}}$$

quantité qui tend à devenir nulle à mesure que x augmente, au moins tant que n n'est pas d'une petitesse comparable à celle de $\frac{1}{\mathrm{l}x}$ (57).

59. Une équation $V=0$, qui a des racines égales, est nécessairement de la forme

$$V=P(x-a)^n=0,$$

le facteur P contenant les racines inégales; et il suit de ce qui a été dit n° 52, que tous les coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}$, jusqu'à $\frac{\mathrm{d}^{n-1}V}{\mathrm{d}x^{n-1}}$ inclusivement, s'évanouiront par la supposition de $x=a$, parcequ'ils renfermeront tous le facteur $x-a$. Les équations

$$V=0,\quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=0,\ldots\quad \frac{\mathrm{d}^{n-1}V}{\mathrm{d}x^{n-1}}=0,$$

auront donc lieu en même temps; et si on cherche le diviseur commun entre la première et la seconde, qui sont respectivement

$$P(x-a)^n=0,\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x-a)^n+nP(x-a)^{n-1}=0,$$

il est visible qu'on doit trouver $(x-a)^{n-1}$,

On

On reconnaîtra sans peine que les équations $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{d^2V}{dx^2}=0$ etc. sont précisément celles que l'on a désignées par (A), (B), etc. dans le n° 205, des Élémens d'Algèbre.

Ces considérations s'appliqueront aisément au cas où la proposée renfermera plusieurs espèces de racines égales, c'est-à-dire, sera de la forme

$$X(x-a)^n(x-b)^p=0;$$

car en différentiant le premier membre suivant la règle du n° 11, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}(x-a)^n(x-b)^p\frac{dX}{dx}+nX(x-a)^{n-1}(x-b)^p\\ \quad+pX(x-a)^n(x-b)^{p-1}\end{array}\right\}$$

quantité qui s'évanouit aussi lorsqu'on fait $x=a$ ou $x=b$, et dont le diviseur commun avec le premier membre de l'équation proposée est évidemment

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}.$$

On peut opérer de même, quel que soit le nombre des facteurs $(x-a)^n$, $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, etc. et on trouvera toujours que le *diviseur commun entre les équations* $V=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, *doit contenir les racines égales, élevées chacune à une puissance moindre d'une unité, que dans la proposée* $V=0$.

Application du Calcul différentiel à la théorie des courbes.

60. C'est par des recherches relatives aux lignes courbes, que les Géomètres sont parvenus au Calcul

différentiel, qu'on a présenté depuis sous des points de vue très-variés; mais quelle que soit l'origine que l'on donne à ce Calcul, il reposera toujours immédiatement sur un *fait analytique* préexistant à toute hypothèse, comme la chute des corps graves vers la surface de la terre, préexiste à toutes les explications qu'on en a données: et ce fait est précisément la propriété dont jouissent toutes les fonctions d'admettre une limite dans le rapport que leurs accroissemens ont avec ceux de la variable dont elles dépendent. Cette limite, différente pour chaque fonction, mais constamment la même pour une même fonction, et toujours indépendante des valeurs absolues des accroissemens, caractérise d'une manière qui lui est propre, la *marche* de cette fonction dans les divers états par lesquels elle peut passer. En effet, plus les accroissemens de la variable indépendante sont petits, plus les valeurs successives de la fonction sont resserrées, plus enfin cette fonction approche d'être soumise à la loi de continuité dans ses changemens, et plus le rapport de ces changemens à ceux de la variable indépendante approche d'être égal à la limite assignée par le calcul. Par la loi de continuité on doit entendre celle qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle. La manière d'envisager les grandeurs dans le calcul, ne paraît pas admettre cette loi, puisqu'on suppose toujours un intervalle entre deux valeurs consécutives de la même quantité; mais plus cet intervalle est petit, plus on se rapproche de la loi de continuité, à laquelle la limite convient parfaitement; c'est aussi en vertu de cette loi de continuité que les accroissemens quoiqu'évanouissans, conservent encore le rapport dont ils se sont approchés par degrés avant de s'évanouir.

Il me paraît maintenant très-évident que la métaphysique précédente renferme l'explication philosophique des propriétés du Calcul différentiel et du Calcul intégral, soit par rapport aux recherches sur les courbes, soit par rapport à celles qui concernent le mouvement. La difficulté des unes et des autres ne vient que de ce qu'il y a continuité dans les changemens des lignes ou dans ceux des vîtesses ; et la considération des limites (ou toute autre équivalente), donne le moyen d'établir cette continuité dans le Calcul.

61. Les considérations géométriques prouvent d'une manière bien évidente que le rapport des accroissemens d'une fonction et de sa variable est en général susceptible de limites.

Toute fonction d'une seule variable peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe dont cette variable est l'abscisse (*Trig.* 77) ; et le rapport de l'ordonnée de la courbe avec la soutangente, correspond au coefficient différentiel de la fonction. En effet, si dans une courbe quelconque CD, *fig.* 1, on mène par deux points M et M' une sécante MM' prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en S, l'axe des abscisses AB, qu'on tire les deux ordonnées PM, $P'M'$, et la droite MQ, parallèle à AB, les triangles semblables $M'QM$ et MPS montreront que les rapports $\frac{M'Q}{MQ}$ et $\frac{PM}{PS}$ sont toujours égaux. Mais si l'on conçoit que le point M' se rapproche sans cesse du point M, le point S se rapprochera aussi du point T ; la ligne PS tendra donc à devenir égale à la soutangente PT : le rapport $\frac{PM}{PS}$ s'approchera de même du rapport $\frac{PM}{PT}$ qu'il aura pour FIG. 1.

limite, et qui sera parconséqnent aussi celle du rapport des accroissemens MQ et $M'Q$ que reçoivent simultanément l'abscisse AP et l'ordonnée PM.

Il suit de là que lorsque la fonction que représente l'ordonnée sera connue, son coefficient différentiel donnera l'expression du rapport $\frac{PM}{PT}$, et que réciproquement si l'expression de ce rapport est connue d'ailleurs, elle fournira le coefficient différentiel de la fonction correspondante à l'ordonnée (*).

62. Lorsque l'on donne à l'abscisse des valeurs successives, les ordonnées qui répondent à ces valeurs, déterminent sur la courbe des points que l'on peut regarder comme les sommets des angles d'un polygone inscrit à cette courbe.

Si l'on prend, par exemple, sur l'axe des abscisses
FIG. 2. les points P, P', P'', *fig.* 2, distans entr'eux d'une même quantité h, on aura

$$AP = x, \quad AP' = x + h, \quad AP'' = x + 2h, \text{ etc.}$$

qu'on élève les ordonnées correspondantes PM, $P'M'$, $P''M''$, et que l'on joigne les points M, M', M'', etc.

(*) Quoiqu'on ne puisse guère révoquer en doute que deux quantités qui sont la limite d'une même quantité variable soient égales, on a coutume néanmoins de démontrer cette proposition comme il suit.

Soient A, B, les deux premières quantités, et V la troisième; si l'on avait $A = B - D$, et que V fût toujours moindre que A, quelque près qu'il fût de cette grandeur, sa différence avec B surpasserait D. On ne peut pas dire non plus que V soit compris entre A et B, car il différerait alors de B ou de A d'une quantité au moins égale à $\frac{1}{2}D$; ainsi dans tous les cas V ne pourrait approcher en même temps aussi près qu'on voudrait des deux quantités A et B, ce qui est contraire à la définition des limites.

par des cordes, on formera le polygone $MM'M''$, etc. qui différera d'autant moins de la courbe proposée que les points M, M', M'', etc. se rapprocheront ; mais en même temps le nombre de ses côtés augmentera de plus en plus, puisque la distance PP' sera contenue un nombre de fois de plus en plus grand dans l'abscisse déterminée AB. La courbe CD sera évidemment la limite de tous ces polygones, et parconséquent les propriétés qui conviendront à cette limite, conviendront aussi à la courbe proposée (*).

Cela posé, si l'on mène MQ et $M'Q'$ parallèles à l'axe AB, $M'Q$ sera la différence des deux ordonnées consécutives PM et PM', $M''Q'$ celle des ordonnées $P'M'$ et $P''M''$. En prolongeant la droite MM' jusqu'en N'', on formera les triangles égaux $MM'Q$, $M'N''Q'$, qui donneront $M'Q = N''Q'$; et il en résultera

$$M''N'' = N''Q' - M''Q' \text{ ou } M''N'' = M''Q' - N''Q';$$

et parconséquent $M''Q' - M'Q = \mp M''N''$ selon que la

(*) Leibnitz a toujours envisagé le Calcul différentiel sous un point de vue à-peu-près semblable.

« Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenùs adhibitas » omnes deduci posse ex generali quodam meo dimetiendorum curvi- » lineorum principio, *quod figura curvilinea censenda sit æqui- » pollere polygono infinitorum laterum* ; unde sequitur, quic- » quid de tali polygono demonstrari potest, sive ità, ut nullus » habeatur ad numerum laterum respectus, sive ità, ut tantò ma- » gis verificetur, quantò major sumitur laterum numerus, ità, ut » error tandem fiat quovis dato minor ; id de curvâ posse pro- » nuntiari ». (*Acta Eruditorum ann.* 1684, *page* 585).

Il est évident que cette métaphysique est aussi très-lumineuse, et ne diffère de celle que j'ai présentée ci-dessus que parceque la *limite* y est désignée comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

courbe est concave ou convexe vers l'axe des abscisses : $M''N''$ sera donc la différence des lignes $M'Q$ et $M''Q'$.

Le calcul différentiel donne l'expression de ces diverses droites ; car on a successivement (21).

$$PM = y$$

$$P'M' = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$P''M'' = y + \frac{dy}{dx}\frac{2h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$P'M' - PM = M'Q = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.}$$

$$P''M'' - P'M' = M''Q' = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{3h^2}{2} + \text{etc.}$$

$$M''Q' - M'Q = \mp M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{etc.}$$

d'où il suit que si l'on prend $h = dx$, la valeur de MQ approchera de plus en plus de la différentielle première dy, celle de $M''N''$, de la différentielle seconde d^2y. En considérant un quatrième point du polygone, on trouverait de même la ligne correspondante à la différentielle troisième.

63. Les lignes PM, $M'Q$, $M''N''$, ont, par rapport au Calcul des limites, une subordination marquée par les exposans dont l'accroissement h est affecté dans leur premier terme, exposant qui est le même que celui de l'ordre de la différentielle à laquelle ils correspondent. On voit en effet que le rapport de $M'Q$ à PM diminue sans cesse et finit par s'évanouir, lorsque $h = 0$, qu'il en est de même du rapport de $M''N''$ à $M'Q$; mais que si l'on comparait la première de celles-ci au quarré de la

seconde, le rapport aurait alors une limite assignable qui serait le rapport de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à $\frac{dy^2}{dx^2}$ (56) (*).

64. On voit en même temps par ce qui précède, que le coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dy}{dx}$, exprimant le rapport $\frac{PM}{PT}$, *fig.* 1, donne la tangente trigonométrique de l'angle MTP, que fait avec l'axe des abscisses AB, la droite qui touche la courbe au point M. FIG. 1.

De plus, si l'on fait attention que lorsque l'ordonnée est positive, la différence $M''Q'-M'Q$ *fig.* 2, est négative ou positive selon que la courbe est concave ou convexe vers l'axe des abscisses, et que cette circonstance doit avoir lieu quelque près qu'on suppose les points P, P', P'', ou quelque petite que soit h, on en conclura que le terme $\frac{d^2y}{dx^2}h^2$, qui commence le développement de $M''Q'-M'Q$, et qui peut être rendu le plus considérable, doit avoir le même signe que la différence $M''Q'-M'Q$; or la quantité h^2 étant essentiellement positive, il suit de ce qui précède que $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif quand la courbe est concave vers son axe des abscisses, et positif dans le cas contraire. FIG. 2.

L'inspection des courbes *cm* placées au-dessous de

(*) Ceci fournit une explication bien simple des différens ordres d'infiniment petits que Leibnitz admettait. Il regardait la diffé-

l'axe des abscisses, montre que les signes de $\frac{d^2y}{dx^2}$ doivent être pris dans un ordre inverse quand l'ordonnée est négative, et que parconséquent : *une courbe est concave, ou convexe vers l'axe des asbcisses selon que l'ordonnée et son coefficient différentiel du second ordre, sont de signes contraires ou de même signe.*

65. Connaissant par le coefficient $\frac{dy}{dx}$, l'angle MTP, rien n'est plus aisé que de construire la tangente MT;
FIG. 1. *fig.* 1; mais on se sert plus ordinairement de la soustangente PT, qui se calcule en observant que

$$\frac{PM}{PT}=\frac{dy}{dx} \text{ donne } PT=\frac{PM.dx}{dy}=\frac{ydx}{dy}.$$

Le triangle PMT, rectangle en T, donne la *tangente*

$$MT=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{PT}^2}=y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}.$$

La considération des triangles semblables PMT et PMR (*Trig.* 152), donne la *sounormale*

$$PR=PM\frac{PM}{PT}=\frac{ydy}{dx}.$$

Le triangle PMR, rectangle en P, donne la *normale*

---

rentielle première comme infiniment petite à l'égard de l'ordonnée; la différentielle seconde comme infiniment petite à l'égard de la différentielle première, et ainsi de suite. D'après ce principe, il négligeait les unes par rapport aux autres, ce qu'il faut faire en effet lorsque l'on veut passer aux limites.

$$MR = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PR}^2} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

66. Voici maintenant quelques applications de ces formules :

L'équation générale des lignes du second degré étant

$$y^2 = mx + nx^2 \ (Trig.\ 148),$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m + 2nx}{2y} = \frac{m + 2nx}{2\sqrt{mx + nx^2}};$$

et on tire de là

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{2(mx + nx^2)}{m + 2nx}$$

$$MT = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \sqrt{mx + nx^2 + 4\left(\frac{mx + nx^2}{m + 2nx}\right)^2}$$

$$PR = \frac{ydy}{dx} = \frac{m + 2nx}{2}$$

$$MR = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{mx + nx^2 + \tfrac{1}{4}(m + 2nx)^2}.$$

Dans le cas où $n = 0$, la courbe devient une parabole (*Trig.* 114), et alors on a seulement

$$PT = 2x, \qquad MT = \sqrt{mx + 4x^2}$$

$$PR = \frac{m}{2}, \qquad MR = \sqrt{mx + \tfrac{1}{4}m^2}.$$

On déduirait de ces valeurs, les résultats et les constructions indiqués dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, pour les lignes du second degré.

Dans la courbe représentée par l'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

on trouvera

$$PT = \frac{y^3 - axy}{ay - x^2} = \frac{2axy - x^3}{ay - x^2},$$

valeur qui se construira facilement, lorsqu'on aura assigné celle de x et déterminé celle de y (*Trig.* 64).

67. Il est souvent plus commode, et surtout plus élégant, de considérer la tangente et la normale par leur équation (*Trig.* 148). Pour obtenir celle de la première, je vais chercher en général les relations qui doivent avoir lieu lorsque deux lignes se touchent. En considérant d'abord ces lignes comme ayant deux points
FIG. 1. M et M', *fig.* 1, communs, il est évident que leurs équations doivent donner les mêmes valeurs de l'ordonnée PM et de la différence $M'Q$, correspondantes à l'abscisse AP et à son accroissement PP'. Si donc on entend par x, y, les coordonnées particulières au point M dans la courbe proposée, et qu'on désigne par x', y', celles des points quelconques de la ligne qui la coupe en M et en M', on aura pour ces deux points

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'}h + \text{etc.} = \frac{dy}{dx}h + \text{etc.} \ (62).$$

La seconde équation est divisible par h, et lorsqu'on en prend la limite, en supposant $h = 0$, elle se réduit à

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx};$$

mais dans cette hypothèse les deux points d'intersection se réunissent en un seul qui devient un point de contact pour les lignes proposées, puisqu'elles n'ont plus que celui-là de commun. Il suit de là que lorsque deux lignes se touchent, on a, pour le point de contact seulement,

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}.$$

Lorsqu'il s'agit de la ligne droite dont l'équation est de la forme

$$y' = Ax' + B \text{ (Trig. 83), et donne } \frac{dy'}{dx'} = A,$$

on a, pour le contact de cette droite avec la courbe proposée,

$$y = Ax + B, \qquad A = \frac{dy}{dx},$$

d'où on conclut

$$B = y - x\frac{dy}{dx} \quad \text{et } y' = \frac{dy}{dx}x' + y - x\frac{dy}{dx},$$

ou $\quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$

D'après cette équation, celle de la normale, qui est perpendiculaire à la tangente et qui passe par le point M sera

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x) \text{ (Trig. 86).}$$

Pour le cercle donné par l'équation

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

on trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

l'équation de sa tangente sera parconséquent

$$y'-y=-\frac{x}{y}(x'-x)\text{, ou } yy'-y^2=-xx'+x^2,$$

ou $$yy'+xx'=a^2,$$

puisque $$y^2+x^2=a^2.$$

L'équation de la normale devient

$$y'-y=\frac{y}{x}(x'-x),$$

et se réduit à

$$y'=\frac{y}{x}x';$$

ce qui fait voir que les normales du cercle passent par son centre qui est ici l'origine des coordonnées (*Trig*. 83), et ce qui doit être en effet, puisque les normales d'un cercle ne sont autre chose que ses rayons.

La tangente de la courbe donnée par l'équation

$$x^3-3axy+y^3=0,$$

a pour équation

$$y'-y=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}(x'-x),$$

ou

$$y^2y'-axy'-y^3+axy=ayx'-x^2x'-axy+x^3.$$

Si l'on met pour y^3 sa valeur, et qu'on réduise, on obtiendra

$$(y^2-ax)y'+(x^2-ay)x'=axy.$$

68. Si on se proposait de mener, par un point donné pris hors d'une courbe, et dont α serait l'abscisse et β

l'ordonnée, une tangente à cette courbe, il est évident qu'il faudrait substituer α au lieu de x', et β au lieu de y', dans l'équation de la tangente, qui deviendrait alors

$$\beta - y = \frac{dy}{dx}(\alpha - x),$$

et servirait, conjointement avec l'équation de la courbe proposée, à déterminer les coordonnées x et y du point de contact.

Je prends le cercle pour premier exemple; l'équation de sa tangente étant

$$yy' + xx' = a^2 \text{ (n° } \textit{précéd.}\text{)},$$

on aura

$$\beta y + \alpha x = a^2.$$

Cette équation combinée avec celle du cercle déterminera les coordonnées x et y des points de contact, ou, ce qui revient au même, ces points seront à la rencontre du cercle avec la droite exprimée par l'équation

$$\beta y + \alpha x = a^2 \text{ (}\textit{Trig.}\text{ 110).}$$

Dans la courbe correspondante à l'équation

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

le point de contact se trouverait en cherchant l'intersection de cette courbe, avec la ligne du second ordre résultante de l'équation

$$\beta(y^2 - ax) + \alpha(x^2 - ay) = axy.$$

69. Pour mener une droite qui touche une courbe donnée, et qui soit en même temps parallèle à une droite donnée de position, ou qui fasse, avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente soit représentée

par a, il suffira de poser $\frac{dy}{dx}=a$ (*Trig.* 85); combinant cette équation avec celle de la courbe proposée, on déterminera les valeurs de x et de y, qui conviennent au point de contact demandé.

Dans le cas où la courbe proposée serait la parabole ordinaire, on aurait

$$y^2=mx, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{m}{2y}=a,$$

ce qui donnerait

$$y=\frac{m}{2a} \text{ et } x=\frac{m}{4a^2}.$$

70. Dans tout ce qui précède, les coordonnées x et y ont été supposées perpendiculaires entr'elles; mais il est aisé de voir que quand même elles feraient un angle quelconque, le rapport de $M'Q$ à MQ, aurait encore pour limite celui de PM à PT; l'équation de la tangente ne changerait pas de forme. A l'égard de MT, de MR et de PR on trouverait leur expression par le moyen des triangles MPT, MTR et MPR, dans lesquels on connaîtrait toujours ou un angle et deux côtés, ou deux angles et un côté.

71. En cherchant les positions que prend la tangente d'une courbe proposée, lorsque le point de contact s'éloigne de plus en plus de l'origine des coordonnées, on peut reconnaître si cette courbe a, comme l'hyperbole, des lignes droites pour asymptotes (*Trig.* 154), et déterminer leur position.

FIG. 3. On voit en effet que dans une courbe MX, *fig.* 3, qui a une asymptote RS, à mesure que le point M s'éloigne de l'origine, la tangente MT s'approche de l'asymptote, et les points T et D marchent respective-

ment vers les points R et E, ensorte que AR et AE sont des limites que les valeurs de AT et de AD ne sauraient franchir, ni même atteindre, mais dont elles peuvent approcher aussi près qu'on voudra. Il suit de là que pour trouver si une courbe a des asymptotes, il faut chercher si les expressions de AT et de AD, relatives à cette courbe, sont susceptibles de limites; et lorsque cela arrivera, ces limites étant construites, donneront les deux points R et E, par lesquels on mènera la droite RS, qui sera l'asymptote demandée.

Les expressions de AT et de AD se tirent de celle de PT; la première, en observant que $AT = AP - PT$; la seconde, par le moyen des triangles semblables ADT et MPT; on les déduit aussi de l'équation de la tangente en faisant successivement $y' = 0$ et $x' = 0$ (*Trig.* 83). On trouvera

$$AT = x - y\frac{dx}{dy}, \qquad AD = y - x\frac{dy}{dx}.$$

72. Ce qui précède étant appliqué à l'équation

$$y^2 = mx + nx^2,$$

conduit à

$$AT = x - \frac{2y^2}{m + 2nx} = \frac{-mx}{m + 2nx},$$

$$AD = y - \frac{mx + 2nx^2}{2y} = \frac{mx}{2\sqrt{mx + nx^2}}.$$

Les derniers membres de ces équations pouvant être mis sous les formes,

$$-\frac{m}{\frac{m}{x} + 2n}, \quad \frac{m}{2\sqrt{\frac{m}{x} + n}},$$

leurs limites respectives, dans le cas où on suppose x

infini, sont

$$-\frac{m}{2n}=AR \text{ et } \frac{m}{2\sqrt{n}}=AE.$$

Si n était nulle, les expressions de AT et de AD deviendraient infinies en même temps que x, et la courbe proposée n'aurait point d'asymptotes; elle n'en aura pas non plus, lorsque n sera négative, parcequ'alors son équation n'admettra point pour x une valeur infinie.

Dans la courbe représentée par l'équation

$$x^3-3axy+y^3=0;$$

on a.

$$AT=\frac{axy}{x^2-ay}, \quad AD=\frac{axy}{y^2-ax}:$$

pour trouver la limite vers laquelle tendent ces expressions, à mesure que y augmente, il faudrait substituer au lieu de y la limite vers laquelle il tend, et connaître parconséquent l'expression de y en x; mais on peut suppléer à cette expression, dans l'exemple présent, par un artifice analytique fort simple. Si on fait $x=ty$, l'équation proposée devient divisible par y^2; on en tire $y=\frac{3at}{1+t^3}$; et il est facile de voir alors que la supposition de $t=-1$, rendra y infini, et donnera $x=-y$. En changeant x en $-y$ dans les expressions de AT et de AD, puis prenant les limites, on aura

$$AR=-a=AE;$$

FIG. 4. et menant par les points R et E, *fig.* 4, construits avec les valeurs précédentes, la droite RE, elle sera l'asymptote des branches AY et AZ.

73.

73. Si, l'une des quantités AR ou AE restant finie, l'autre devenait infinie, il est évident que l'asymptote serait parallèle à l'axe sur lequel se trouve cette dernière.

Pour ne manquer aucune des asymptotes que doit avoir la courbe proposée, il faut donc faire successivement x infini et y infini, et substituer dans les expressions de AT et de AD, chacun des résultats différens que donnent l'une et l'autre hypothèse. Lorsque AT et AD seront toujours infinies en même temps, on en conclura que la courbe proposée n'a pas d'asymptote.

Il pourrait arriver que ces quantités fussent toutes deux nulles : dans ce cas, la courbe aurait pour asymptote une droite menée par l'origine des coordonnées; mais comme on n'en connaîtrait alors qu'un point, il faudrait en chercher la direction, et pour cela on prendrait la limite de l'expression $\frac{dy}{dx}$, qui représente la tangente de l'angle MTP (64), pour un point quelconque de la courbe, et on aurait la tangente de l'angle SRB.

74. On suppose ordinairement comme une chose évidente, qu'*un petit arc de courbe peut être pris pour sa corde*, c'est-à-dire que *le rapport de l'arc et de sa corde a pour limite l'unité*. Cette proposition, très-importante, a néanmoins besoin d'être démontrée, et peut l'être comme il suit.

Le triangle rectangle $MM'Q$, *fig.* 5, donne FIG. 5.

$$MM' = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2};$$

on a de plus (62),

$$MQ = h,\ M'Q = \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

On peut mettre ce développement sous la forme

$$(p+Ph)\,h,$$

en faisant

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}=Ph^2 \text{ et } \frac{dy}{dx}=p\,;$$

on obtiendra

$$MM'=\sqrt{h^2+(p+Ph)^2h^2}=h\sqrt{1+(p+Ph)^2}.$$

Menant ensuite la tangente MN, on trouvera

$$NQ=MQ \tang NMQ=\frac{dy}{dx}h=ph \quad (64)$$

$$MN=\sqrt{h^2+p^2h^2}=h\sqrt{1+p^2}$$

$$M'N=NQ-M'Q=-\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\text{etc.}=-Ph^2;$$

et on conclura de là

$$\frac{MN+M'N}{MM'}=\frac{h\sqrt{1+p^2}-Ph^2}{h\sqrt{1+(p+Ph)^2}}=\frac{\sqrt{1+p^2}-Ph}{\sqrt{1+(p+Ph)^2}},$$

rapport qui a pour limite,

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}=1.$$

Mais l'arc MOM' est toujours compris entre la corde MM' et la ligne brisée $MN+M'N$; donc, à plus forte raison, le rapport $\frac{MOM'}{MM'}$ a pour limite l'unité.

75. Il est évident que l'arc d'une courbe est une fonction de l'abscisse; et pour avoir le coefficient différentiel de cette fonction, il faut chercher la limite du rapport $\frac{MOM'}{PP'}$; or on a

$$\frac{MOM'}{PP'}=\frac{MM'}{PP'}\times\frac{MOM'}{MM'}.$$

Substituant la valeur du premier rapport du second membre, faisant $h=0$ pour passer à la limite, le deuxième rapport deviendra l'unité, et l'on aura (8) $\sqrt{1+p^2}$; si l'on nomme donc z l'arc CM, il viendra

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \quad \text{ou} \quad dz=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Le cercle dont l'équation est

$$x^2+y^2=a^2,$$

donnant

$$xdx+ydy=0, \quad \text{ou} \quad dy=-\frac{xdx}{y},$$

il vient

$$dz=\sqrt{dx^2+\frac{x^2dx^2}{y^2}}=\frac{dx}{y}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\frac{adx}{y}=\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

résultat qui rentre dans celui du n° 35, lorsqu'on suppose $a=1$.

76. La différentielle de l'aire du *segment* $ACMP$ d'une courbe s'obtient, en observant que le rapport des rectangles $PP'QM$ et $PP'M'N$, *fig.* 6, qui ont même base, est égal à $\frac{P'M'}{PM}$, et que sa limite est par-conséquent l'unité. Il suit de là que le trapèze curviligne $PP'MM'$, toujours compris entre les deux rectangles dont on vient de parler, et représentant l'accroissement que reçoit le segment $ACMP$ lorsque l'abscisse augmente de PP', tend sans cesse à devenir égal au rectangle $PP'QM$, ou que le rapport FIG. 6.

$$\frac{PP'M'M}{PP'\times PM}=\frac{PP'M'M}{PP'}\times\frac{1}{PM}$$

a pour limite l'unité. En nommant donc s la fonction de x, correspondante à l'aire $ACMP$, on aura pour la limite (8)

$$\frac{PP'MM'}{PP'} = \frac{ds}{dx}$$

et

$$\frac{ds}{dx} \times \frac{1}{y} = 1 \text{ ou } ds = y dx.$$

Dans le cercle

$$ds = dx \sqrt{a^2 - x^2};$$

ainsi, quoiqu'on ne puisse pas assigner l'expression algébrique du segment circulaire, on parvient à celle de sa différentielle par la considération des limites.

Recherche des points singuliers des courbes.

77. On appelle *points singuliers* d'une courbe ceux dans lesquels elle offre quelque circonstance remarquable ; et le calcul différentiel fournit des moyens très-simples pour en reconnaître l'existence, et en déterminer la position.

Lorsque le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, qui exprime la tangente de l'angle MTP (64), est nul, il s'ensuit que la droite qui touche la courbe au point M est parallèle à la ligne des abscisses, et s'il change de signe après ce point, la tangente incline alors du côté de l'ordonnée opposé à celui où elle inclinait d'abord. L'inspection

FIG. 7 et 8. des deux figures 7 et 8, montre que dans ce cas, l'ordonnée, après avoir atteint une certaine grandeur, vient à diminuer (*fig.* 7), ou bien qu'après avoir diminué jusqu'à certain point, elle vient à croître (*fig.* 8).

La première circonstance répond évidemment au *maximum* de l'ordonnée y, et la seconde à son *mini-*

mum. Quand l'un ou l'autre ont lieu, on a donc également $\frac{dy}{dx}=0$, ainsi que le montrent les considérations analytiques (48).

78. Les considérations géométriques prouvent aussi que ce caractère ne convient pas seulement aux points où il y a *maximum* ou *minimum*, mais qu'il a encore lieu dans d'autres circonstances. Quoique la tangente au point M de la figure 9 soit parallèle à la ligne des abscisses, ce point ne correspond pourtant pas à un *maximum*, parcequ'au-delà l'ordonnée continue à croître; mais il faut remarquer que la concavité de la courbe, d'abord tournée vers l'axe des abscisses, ou placée au-dessous de la tangente, est ensuite tournée du côté opposé. Cette circonstance est ce qu'on appelle une *inflexion*, et le point M est un point d'inflexion; elle se remarque parceque le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ change de signe avant et après le point M (64). Elle se reconnaît encore en cherchant la position de la courbe, par rapport à sa tangente, avant et après ce point. FIG. 9.

L'équation de la tangente étant en général

$$(y'-y)=\frac{dy}{dx}(x'-x)\ (67),$$

on aura, en faisant $x'=x+h$,

$$y'-y=\frac{dy}{dx}h,$$

ou

$$y=y'+\frac{dy}{dx}h,$$

pour l'expression de $P'N'$, *fig.* 10, qui est l'ordonnée de la tangente correspondante au point P' dont l'abscisse est $x+h$; mais puisque y est une fonction de x, on aura (21) pour $P'M'$ cette série FIG. 10.

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

d'où on déduira

$$P'M'-P'N'=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Prenant sur l'axe des abscisses un point $P_{,}$ en arrière du point P, et dont l'abscisse soit $x-h$, on trouverait de même

$$P_{,}M_{,}-P_{,}N_{,}=\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Il est évident maintenant que si $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, les deux différences

$$P'M'-P'N'=\quad\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$P_{,}M_{,}-P_{,}N_{,}=-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

seront de signes contraires, au moins lorsqu'on prendra h assez petite pour que le premier terme de la série soit plus grand que la somme des autres (48); ainsi la courbe proposée, après avoir été au-dessous de sa tangente, passera au-dessus, *et vice versâ*.

FIG. 9. Il y aura donc au point M, *fig.* 9, *inflexion* et non pas *maximum* ou *minimum*, si $\frac{d^2y}{dx^2}$ y devient nul en même temps que $\frac{dy}{dx}$, et en général si le premier des coefficiens différentiels qui ne s'anéantissent pas est d'un ordre impair. Telle est la signification géométrique des caractères analytiques indiqués dans le n° 49.

79. Il peut y avoir inflexion dans des points où la tangente n'est pas parallèle à la ligne des abscisses, et où l'on n'ait pas parconséquent $\frac{dy}{dx}=0$; mais le carac-

tère de ce point est toujours le changement du signe de $\frac{d^2y}{d^2x}$ par rapport à y.

Il est évident que toute quantité entière ne peut changer de signe qu'en passant par zéro ; mais une quantité fractionnaire peut aussi changer de signe en passant par l'infini, ainsi que cela arrive à l'expression $\frac{a}{x}$, qui devient successivement

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{0}, -\frac{a}{b},$$

lorsqu'on y fait $x=b$, $x=0$, $x=-b$: on peut donc conclure de ce qui précède, que pour *un point d'inflexion* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *est nul ou infini ;* mais il ne faut pas renverser cette proposition.

80. Quand $\frac{dy}{dx}$ au lieu de s'évanouir devient infini, l'ordonnée devient tangente comme en E, *fig.* 11 ; cette circonstance répond à une *limite* de la courbe dans le sens des abscisses, c'est-à-dire à un *maximum* ou à un *minimum* de l'abscisse, à moins qu'il n'y ait en ce point une inflexion dans laquelle la tangente soit perpendiculaire à la ligne des abscisses. FIG. 11.

81. On a vu, n° 55, que $\frac{dy}{dx}$ devenait infini lorsque quelque radical disparaissait. Il faut remarquer qu'alors pour une seule valeur de y, le changement de cette fonction doit, contre la règle ordinaire, avoir plusieurs valeurs; car sans cela on n'en retrouverait plus le nombre que comporte le degré de la fonction, et qui doit demeurer toujours le même, l'égalité de plusieurs de ces valeurs ne pouvant être qu'instantanée.

Cette circonstance se trouve au point E, où il est visible que pour l'abscisse Ac, consécutive à AC, la courbe a deux ordonnées, et que parconséquent la

même ordonnée CE a deux différences, l'une $ce'-CE$, et l'autre $CE-ce$.

Il en arrive autant au point G où deux branches de la courbe se coupent ; l'ordonnée particulière FG a aussi pour le même accroissement d'abscisse Ff deux différences, l'une $fg'-FG$, l'autre $FG-fg$; mais dans les autres parties de la courbe, une même ordonnée n'a pour chaque accroissement d'abscisse qu'une seule différence.

Les points qui sont l'intersection de plusieurs branches comme G, ou la réunion de deux branches GDE et $GD'E$, comme E, sont nommés *points multiples*. On les reconnaît parcequ'une seule ordonnée a pour une même abscisse plusieurs différentielles, ce qui fait que le coefficient différentiel y devient infini. Il peut aussi s'y montrer sous la forme $\frac{0}{0}$, et cela arrive toujours lorsque son expression contient en même temps les deux variables x et y.

Dans chacun de ces points la courbe a plusieurs tangentes. En G, par exemple, elle en a deux bien distinctes ; en E elle en a encore deux, mais réunies en une seule, qui est la limite de celles de la branche supérieure $GD'E$ et de celles de la branche inférieure GDE.

82. Les points multiples prennent quelquefois deux formes particulières auxquelles on a donné le nom de *rebroussement*, parceque les branches de courbe qui s'y rencontrent ne s'étendent pas au-delà. Celui de la
FIG. 12 et 13. fig. 12, dans lequel les deux branches s'opposent leur convexité, est le *rebroussement de la première espèce ;* et celui de la fig. 13, dans lequel les deux branches tournent leur concavité du même côté, est le *rebroussement de la seconde espèce.*

Ces points n'ont qu'une seule tangente, mais qu'on doit regarder comme double, ainsi que celle du point E dans la fig. du n° précédent ; et ils se distinguent des

autres points multiples par la marche que tient la courbe avant et après, à l'égard de sa tangente, et qu'on peut reconnaître par le signe du coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ (64), en prenant successivement pour x des valeurs, l'une plus grande et l'autre plus petite que l'abscisse qui correspond au point multiple qu'on se propose d'examiner.

83. Tout ce qui précède peut être réduit à cette règle aussi simple que sûre : *on obtiendra généralement l'indication de l'abscisse à laquelle répond un point singulier, en cherchant dans quels cas les coefficiens différentiels, à partir d'un ordre quelconque, deviennent nuls ou infinis ou* $\frac{0}{0}$ *: l'on assignera l'espèce du point,* 1°. *en examinant combien il passe de branches de la courbe à ce point, et si elles s'étendent ou non en-deçà et au-delà ;* 2°. *en déterminant la position de leur tangente ;* 3°. *le sens dans lequel elles tournent leur concavité ou leur convexité.*

84. On rencontre dans la *famille* de courbes représentées par l'équation très-simple,

$$y = b + c\,(x - a)^m,$$

des exemples de presque toutes les particularités indiquées précédemment ; et leur discussion est bien propre à éclaircir la règle ci-dessus.

L'expression

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m\,(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)\,c\,(x-a)^{m-n},$$

lorsqu'on y fait $x = a$, s'évanouissant pour tous les cas où $m > n$, et devenant infinie dans ceux où $m < n$, il en résulte que l'abscisse a répond à un point singulier.

L'exposant m peut être positif ou négatif, plus grand ou moindre que l'unité : je le supposerai d'abord positif et > 1.

S'il est un nomber pair, ou fractionnaire, mais de

numérateur pair, on trouve, 1°. soit qu'on prenne $x < a$ ou $x > a$, la même valeur pour y; la courbe s'étend donc sur les abscisses qui précèdent et qui suivent a, et il ne passe qu'une seule branche par le point qu'on examine.

2°. Par l'expression

$$\frac{dy}{dx} = mc\,(x-a)^{m-1},$$

qui s'évanouit quand $x=a$, on voit que la tangente à ce point, est parallèle à l'axe des abscisses.

3°. Si on fait alternativement $x<a$ et $x>a$ dans la valeur de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\,(m-1)\,c\,(x-a)^{m-2},$$

et qu'on observe que, d'après l'hypothèse établie, l'exposant $m-2$ est encore un nombre pair ou un nombre fractionnaire de numérateur pair, on reconnaîtra que ce coefficient différentiel conserve le même signe dans les deux cas, comme l'ordonnée y, et que par conséquent la courbe tourne sa concavité du même côté avant et après le point qu'on examine. Son cours auprès
FIG. 14. de ce point, est donc un de ceux que représente la figure 14; le premier, si c est négatif, et le second dans le cas contraire.

Si l'exposant m est un nombre impair, ou fractionnaire, mais dont le numérateur et le dénominateur soient tous deux impairs, l'ordonnée pour chaque abscisse n'a qu'une seule valeur; et en prenant $x<a$ et $x>a$, on trouve pour y deux valeurs réelles : la courbe s'étendra encore avant et après le point qu'on examine, et il ne passera qu'une branche à ce point. La tangente est toujours parallèle à la ligne des abscisses; mais l'exposant $m-2$ étant alors ou un nombre impair ou fractionnaire de

numérateur et de dénominateur impairs, le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ changera de signe lorsqu'on y fera $x < a$ et $x > a$; la courbe ne tournera parconséquent pas sa concavité du même côté avant et après le point qu'on examine : ce point sera donc une *inflexion* comme dans la fig. 15. FIG. 15.

Enfin, si l'exposant m est un nombre fractionnaire dont le dénominateur soit pair, la quantité $(x-a)^m$ étant alors susceptible des signes $\pm$, l'ordonnée y a pour chaque abscisse deux valeurs réelles quand $x > a$, et imaginaires quand $x < a$; il passe donc deux branches de courbe par le point qu'on examine; mais qui ne s'étendent que d'un côté. Leur tangente est encore parallèle à l'axe des abscisses. Le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ a deux valeurs de signes différens, tandis que celles de l'ordonnée sont de même signe. Il suit de là qu'une des branches tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, et l'autre sa convexité, ainsi que le montre la figure 16, ce qui produit un rebroussement de la première espèce. FIG. 16.

3°. Si l'exposant $m < 1$, comme on aurait alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mc}{(x-a)^{1-m}},$$

la valeur $x = a$ rendrait ce coefficient différentiel infini; la droite qui touche la courbe au point où $x = a$, serait perpendiculaire à l'axe des abscisses. On trouverait, par des considérations semblables aux précédentes, que le point C est une *limite* de la courbe suivant l'axe des abscisses, lorsque m est une fraction dont le numérateur est impair, et le dénominateur pair; que ce point est un rebroussement lorsque le numérateur est pair

enfin une inflexion lorsque le numérateur et le dénominateur sont tous deux impairs (*).

L'ordonnée y deviendrait infinie, et se changerait en asymptote, si l'exposant m était négatif.

85. La courbe représentée par l'équation

$$(y-x^2)^2 = x^5$$

offre un exemple du rebroussement de la *seconde espèce* (82). Dans cette courbe,

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}.$$

Pour savoir si elle a quelque point singulier, il faut chercher si quelqu'un des coefficiens différentiels de la fonction y ne devient pas nul ou infini. On obtient d'abord

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}};$$

le premier de ces résultats s'évanouit quand $x=0$, le second se réduit à 2; et l'on voit ensuite que le troisième coefficient différentiel,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},$$

devient infini dans ce cas: le point correspondant à $x=0$, est donc *un point singulier*. Il est d'abord évident que ce point est une limite de la courbe qui ne s'étend pas

---

FIG. 17 et 18. (*) Le rebroussement de la fig. 17 pourrait à la rigueur être pris pour un *maximum*, et celui de la fig. 18 pour un *minimum*.

du côté des abscisses négatives, puisque le terme $x^{\frac{5}{2}}$ devient alors imaginaire. Les valeurs du coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont toutes deux positives quand x est très-petit et de même signe que celles de y; les deux branches de la courbe tournent donc en meme temps leur convexité vers l'axe des abscisses AB, *fig.* 13 : elles se touchent au point A, car elles y ont pour tangente commune l'axe AB, puisqu'à ce point $\frac{dy}{dx} = 0$. Il résulte de l'ensemble de ces caractères que la forme de la courbe en ce point est telle que la représente la figure. FIG. 13.

Les exemples précédens ne se rapportant qu'à des points singuliers où les branches de la courbe se tonchent, ne donnent lieu qu'à une seule tangente; la courbe correspondante à l'équation $ay = \sqrt{a^2x^2 - x^4}$ du n° 52 présenterait au point où $x = 0$, deux branches qui se coupent en deux tangentes ; mais je ne m'arrêterai point à cet exemple, parceque plus loin j'en developperai un autre qui offrira la même circonstance.

86. Les courbes sont accompagnées quelquefois de points isolés qui ont le caractère des points multiples; mais on les endistingue, parceque le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ prend pour les premiers une valeur imaginaire.

Soit l'équation

$$ay^2 - x^3 + bx^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y=\sqrt{\frac{x^2(x-b)}{a}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(3x-2b)}{2\sqrt{ax^2(x-b)}}.$$

Le coefficient différentiel devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=0$; mais on peut en avoir la vraie valeur en supprimant le facteur x, commun aux deux termes de la fraction : on obtient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x-2b}{2\sqrt{a(x-b)}};$$

faisant alors $x=0$, il en résulte

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2b}{2\sqrt{-ab}},$$

expression imaginaire.

Dans la même hypothèse, l'équation proposée donne $y=0$; mais cette ordonnée, qui est imaginaire lorsque x est négatif, redevient encore telle jusqu'à ce que $x=b$;
FIG. 20. ainsi le point A, *fig.* 20, quoique compris dans l'équation de la courbe, en est absolument détaché.

Les points de cette espèce se nomment *points conjugués;* ils résultent de ce qu'une portion finie de la courbe proposée s'évanouit par la détermination particulière de quelque constante de son équation. La courbe représentée par l'équation

$$ay^2-x^3+(b-c)x^2+bcx=0,$$

qui donne

$$y=\pm\sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}},$$

offre un exemple de ces changemens. Elle a d'abord le cours représenté dans la *fig.* 19; la supposition de $c=0$ réduit la partie AF au seul point A, *fig.* 20, comme on l'a vu ci-dessus : elle prend la *fig.* 21 lorsque $b=0$, sans que c s'évanouisse, et la *fig.* 22, si l'on fait en même temps $b=0$, $c=0$. FIG. 19, 20, 21 et 22.

Les courbes ont aussi quelquefois des points singuliers qui ne sont pas visibles : ce sont ceux qui résultent d'un nombre pair d'inflexions qui se réunissent en une seule. (*Voyez* pour ces points et pour ceux de *serpentement* dont ils dérivent, le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*). (*)

Exemple de l'analyse d'une courbe.

87. On divise les lignes en différens ordres d'après le degré de leur équation. La ligne droite forme le premier ordre, parcequ'elle représente l'équation générale du premier degré à deux indéterminées. Les lignes du second ou du troisième ordre sont celles dont les équations montent au second ou au troisième degré, et ainsi des autres. Newton considérant que le premier ordre ne renfermait que la ligne droite et que les courbes

(*) En quittant ce sujet, je ferai observer que la marche suivie dans ce qui précède, pour déterminer les points singuliers des courbes, déjà tracée dans le premier volume du *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, et la règle du n° 83, qui se trouve dans la première édition de cet abrégé, paraissent ne rien laisser à desirer.

ne commençaient à se montrer que dans le second, divisa ces dernières en genres, et nomma courbes du premier genre les lignes du second ordre, courbes du deuxième genre celles du troisième ordre, et ainsi de suite.

Les lignes d'un même ordre se subdivisent en espèces par la considération des principales circonstances de leur cours.

S'il était possible de résoudre les équations de tous les degrés, rien ne serait plus facile que de suivre le cours de la courbe représentée par une équation algébrique quelconque. En effet, supposons que cette équation étant résolue par rapport à l'une des indéterminées qu'elle renferme, y, par exemple, fournisse les différentes racines X', X'', X''', etc. qui seront nécessairement des fonctions de x et de constantes; la question se réduira à examiner en particulier le cours de chacune des lignes produites par les équations.

$$y = X', \qquad y = X'', \qquad y = X''', \text{ etc.}$$

lorsqu'on donne à x toutes les valeurs tant positives que négatives, que peuvent admettre les fonctions X', X'', X''', etc. sans cesser d'etre réelles. Ces lignes seront autant de branches de la courbe qui représente l'équation proposée.

L'étendue de chaque branche sera déterminée par celle que comprennent les diverses solutions dont est susceptible l'équation qu'elle représente en particulier, Si parmi les quantités X', X'', X''', etc. il s'en trouve qui deviennent infinies, ou dans lesquelles on puisse supposer x infini, il en naîtra des branches dont le cours sera infini, puisqu'elles pourront s'éloigner indéfiniment de l'un des axes ou de tous les deux à-la-fois.

Une

Une branche ne s'arrête que parceque l'expression de son ordonnée devient imaginaire, mais le cours de la courbe proposée n'est pas interrompu pour cela ; il arrive seulement alors que deux branches se réunissent et se continuent réciproquement. On s'en convaincra en observant que les valeurs imaginaires de y sont nécessairement en nombre pair, et que celles d'un même couple ont été réelles et égales avant de devenir imaginaires. En effet, l'équation proposée pouvant toujours se décomposer en facteurs réels du premier et du second degré, si on représente par $y^2-2Py+Q=0$ un de ces derniers, on verra que ses racines, $P\pm\sqrt{P^2-Q}$, ne deviennent imaginaires qu'à cause que Q devient plus grand que P^2, de moindre qu'il était d'abord, et qu'il y a parconséquent un point où les fonctions de x que désignent les lettres P et Q, sont telles qu'on a $P^2=Q$, ce qui anéantit la quantité radicale, et donne pour y deux valeurs égales.

Si plusieurs branches se coupent dans un point, il arrivera aussi qu'un pareil nombre de valeurs de y deviendront égales.

88. Soit l'équation.

$$y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0.$$

Cette équation résoluble, soit par rapport à y, soit par rapport à x, donne dans le premier cas

$$y=\pm\sqrt{48a^2\pm\sqrt{2304a^4-100a^2x^2+x^4}}.$$

En discutant chacune des valeurs de y, comme on l'a fait à l'égard de celles de l'équation générale du second degré à deux indéterminées (*Trig.* 107 et suiv.), on pourrait découvrir l'étendue et les limites des branches

dont la courbe proposée se forme, déterminer les points où elles rencontrent les axes (*Trig.* 81), où elles se coupent ou se réunissent ; mais l'application du Calcul différentiel abrégera beaucoup ces recherches, et aura l'avantage de montrer comment elles peuvent s'effectuer lors même que l'équation de la courbe proposée est d'un degré trop élevé pour qu'on puisse obtenir l'expression générale de l'une des variables par le moyen de l'autre.

89. Pour déterminer les limites de la courbe dans le sens des ordonnées, ou découvrir si y est susceptible de *maximum* ou de *minimum*, on examinera dans quel cas le coefficient différentiel.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-50a^2x}{y^3-48a^2y}$$

devient nul ; on aura

$$x^3-50a^2x=0,$$

d'où $\quad x=0, \qquad x=\pm 5a\sqrt{2}.$

La première valeur de x, substituée dans l'équation proposée, donne

$$y=0 \text{ et } y=\pm 4a\sqrt{6}$$

Les deux valeurs de y, égales à $\pm 4a\sqrt{6}$, donnent
FIG. 23. les points D et D', *fig.* 23, situés l'un au-dessus de l'axe des abscisses, l'autre au-dessous, et qui sont de véritables *maxima.* On s'en convaincrait, soit en cherchant ce que devient alors $\frac{d^2y}{dx^2}$, soit en vérifiant par l'expression de y, si les valeurs des ordonnées qui précèdent et qui suivent immédiatement, sont toutes deux plus petites que $4a\sqrt{6}$.

90. Le concours des deux valeurs $x=0$, et $y=0$, indique le point A, et rend en même temps $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Pour savoir ce que signifie cette dernière expression qui caractérise en général un point multiple, il faudrait recourir au procédé du n° 56 ; mais on peut y parvenir en cherchant le coefficient différentiel du second ordre. Pour cela, j'observe que la différentielle première de l'équation proposée est

$$(y^3-48a^2y)\,dy+(50a^2x-x^3)\,dx=0,$$

et la différentielle seconde

$$\left.\begin{array}{l}(y^3-48a^2y)\,d^2y+(3y^2-48a^2)\,dy^2\\ \qquad+(50a^2-3x^2)\,dx^2\end{array}\right\}=0;$$

et que, dans le cas où x et y s'évanouissent, celle-ci se réduit à

$$-48a^2dy^2+50a^2dx^2=0,$$

que parconséquent elle donne, pour ce cas seulement, les valeurs du coefficient $\frac{dy}{dx}$, qu'on ne peut alors tirer de la différentielle première : on a en effet

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\tfrac{50}{48}}=\pm\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Il suit de ces valeurs que la courbe a au point A deux tangentes, qui font, avec l'axe des abscisses, des angles dont les tangentes-trigonométriques sont respectivement

$$\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}},\qquad -\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

et qu'il est parconséquent aisé de construire (*).

Il reste à examiner les racines

$$x = \pm 5a\sqrt{2}.$$

En les substituant dans l'équation proposée, elles rendent y imaginaire, et ne donnent parconséquent ni *maximum* ni *minimum*.

91. Pour obtenir les limites de la courbe dans le sens des abscisses, ou ce qui revient au même, les *maxima* et les *minima* de x (80), on égalera à o le dénominateur de la fraction qui exprime $\frac{dy}{dx}$, ce qui fournira l'équation $y^3 - 48a^2y = 0$, d'où $y = 0$ et $y = \pm\sqrt{48a^2}$. La première valeur donne $100a^2x^2 - x^4 = 0$, et l'on en conclut $x = 0$, $x = \pm 10a$. La racine $x = 0$ indique encore le point multiple placé à l'origine A, mais les deux autres répondent aux points I et I', où la courbe rencontre l'axe des abscisses AB, et qui n'avaient pas encore été remarqués.

Les deux dernières valeurs $y = \pm\sqrt{48a^2} = \pm 4a\sqrt{3}$ conduisent à $x = \pm 6a$, et $x = \pm 8a$: l'un de ces résultats fait connaître le point F et ses analogues, l'autre donne H et ses analogues. On observera qu'aux points F et I l'abscisse est un *maximum*, et qu'elle est un *mini-*

(*) On parviendra en général, comme ci-dessus, à trouver la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$, dans le cas où il devient $\frac{0}{0}$, en examinant les différentielles successives de l'équation proposée, et en descendant jusqu'à l'ordre dont l'exposant est égal au nombre de valeurs que doit avoir $\frac{dy}{dx}$.

mum au point H, puisque dans le premier cas la courbe tourne sa concavité vers l'axe AC des ordonnées, auquel elle présente sa convexité dans le second.

92. Pour achever de déterminer les principales circonstances de la courbe proposée, il reste à trouver la nature de ses branches infinies et ses points d'inflexion, car connaissant ses divers points multiples, on sait déjà qu'elle n'a aucun rebroussement : je commencerai par m'occuper des branches infinies. On peut facilement s'assurer que deux des valeurs de y rapportées dans le n° 88, deviennent infinies en même tems que x; mais sans recourir à ces valeurs, si l'on fait $y=tx$, l'équation proposée se divise par x^2 et devient

$$t^4x^2-96a^2t^2+100a^2-x^2=0,$$

d'où l'on tire

$$x^2=\frac{100a^2-96a^2t^2}{1-t^4},$$

résultat qui donne $x=\pm$ infini, lorsque $t=1$; et alors $y=x$.

On aura ensuite (71)

$$x-y\frac{dx}{dy}=\frac{x^4-50a^2x^2-y^4+48a^2y^2}{x^3-50a^2x}$$

$$y-x\frac{dy}{dx}=\frac{y^4-48a^2y^2-x^4+50a^2x^2}{y^3-48a^2y}.$$

Ces expressions qui, lorsqu'on y met pour x^4 sa valeur, se réduisent à

$$\frac{50a^2x^2-48a^2y^2}{x^3-50a^2x},\qquad\frac{48a^2y^2-50a^2x^2}{y^3-48a^2y}$$

diminuent sans cesse à mesure que x et y augmentent, et n'ont que zéro pour limite, lorsqu'on y suppose $y=x$. On voit par là (73) que la courbe proposée a pour asymptotes deux droites menées par l'origine A; et comme l'expression de $\frac{dy}{dx}$ a pour limite l'unité, il s'ensuit que ces asymptôtes font un angle de 0q,5 avec l'axe des abscisses. On ne les à point menées, pour ne pas trop compliquer la figure.

93. Je passe maintenant à la recherche des inflexions. On a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3x^2-50a^2)-(3y^2-48a^2)\frac{dy^2}{dx^2}}{y^3-48a^2y}:$$

cette expression devient $\frac{0}{0}$, lorsque y et x sont nuls, cas dans lequel $\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{50}{48}$; et pour trouver sa vraie valeur, il faudra chercher la différentielle troisième de l'équation proposée. Faisant dans le résultat x et y égaux à zéro, on aura seulement $-144a^2dy\,d^2y=0$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, et prouve que le point A est en effet un point d'inflexion.

Pour voir si la courbe proposée en a encore d'autres, il faut égaler le numérateur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à zéro, et il viendra l'équation

$$3x^2-50a^2-(3y^2-48a^2)\frac{dy^2}{dx^2}=0;$$

mettant pour $\frac{dy^2}{dx^2}$ sa valeur, et faisant disparaître le dénominateur, on aura

$$(3x^2-50a^2)(y^3-48a^2y)^2$$
$$-(3y^2-48a^2)(x^3-50a^2x)^2=0:$$

on peut donner à cette équation la forme suivante :

$$y^2(y^2-48a^2)^2(3x^2-50a^2)$$
$$-x^2(x^2-50a^2)^2(3y^2-48a^2)=0.$$

Si maintenant on observe que l'équation proposée revient elle-même à celle-ci,

$$(y^2-48a^2)^2-(x^2-50a^2)^2+196a^4=0,$$

et qu'on prenne la valeur de $(y^2-48a^2)^2$, pour la substituer dans la précédente, on trouvera après les réductions

$$(x^2-50a^2)^2(25y^2-24x^2)$$
$$+98a^2y^2(3x^2-50a^2)=0:$$

cette dernière combinée avec la proposée, servira à déterminer les abscisses et les ordonnées du point d'inflexion *K* et de ses analogues dans les autres branches; on en tirera facilement la valeur de y^2, et en substituant dans l'équation de la courbe proposée, on aura un résultat qui ne contiendra plus que x.

En faisant $\frac{d^2y}{dx^2}$ infini, ou en égalant à zéro son dénominateur y^3-48a^2y, on trouvera

$$y=0 \text{ et } y=\pm\sqrt{48a^2}:$$

ces valeurs n'apprennent rien de nouveau ; elles appartiennent au point *A* qui a déjà été remarqué, et aux points *F*, *H* et *I*, qui ne sont pas des points

d'inflexion, mais seulement des limites de la courbe dans le sens de ses abscisses.

En rapprochant tout ce qui précède, on voit que la forme de la courbe proposée est successivement déterminée par les circonstances qu'offrent les points A, D, F, I, H, K et les branches infinies X et X'.

Des courbes osculatrices.

94. C'est en rapportant une courbe à sa tangente qu'on a appris la manière de déterminer les diverses circonstances de son cours. Les géomètres ne se sont point bornés à comparer ainsi les courbes à des lignes droites dont elles s'éloignent bientôt, mais ils se sont proposé de trouver parmi des courbes simples comme la parabole, le cercle, etc. celles qui, dans un petit espace, s'approchent le plus d'une courbe quelconque.

La tangente d'une courbe étant la limite de toutes les droites qui rencontrent cette courbe en deux points, on peut par analogie chercher en général parmi toutes les lignes d'une espèce donnée, la limite de celles qui coupent la courbe proposée en un nombre donné de points.

On sait, par exemple, qu'il faut trois points pour déterminer un cercle; on peut supposer que ces trois points soient pris sur la courbe proposée, et chercher à quel cercle en particulier l'on arrivera, si les trois points viennent à coïncider. Ce cercle, qui se nomme le *cercle osculateur*, sera la limite de tous les autres, comme la tangente est celle de toutes les sécantes.

Celle-ci se détermine par les deux constantes qui

entrent dans son équation (*Trig.* 83), et le cercle par les trois constantes qui expriment l'abscisse et l'ordonnée de son centre et la grandeur de son rayon (*Trig.* 90).

Il est visible que lorsque deux courbes quelconques DX, EY, ont trois points communs M, M', M'', *fig.* 24, elles ont nécessairement trois ordonnées communes, ou ce qui est la même chose, il y a deux côtés du polygone $MM'M''$ etc. *fig.* 2, qui sont incrits en même temps à chacune de ces courbes, et les lignes PM, $M'Q$ et $M''N''$ (62) ont la même valeur dans l'une et l'autre. En désignant donc toujours par x, y, les coordonnées particulières au point M dans la courbe proposée DX, *fig.* 24, et par y', x', celles d'un point quelconque de la seconde courbe EY, on aura par le n° 62, pour les points M, M', M'', FIG. 24. FIG. 2. FIG. 24.

$$\left.\begin{array}{c} y'=y \\ \frac{dy'}{dx'}h+\text{etc.}=\frac{dy}{dx}h+\text{etc.} \\ \frac{dy'^2}{dx'^2}h^2+\text{etc.}=\frac{d^2y}{dx^2}h^2+\text{etc.} \end{array}\right\}\text{ou}\left\{\begin{array}{c} y'=y \\ \frac{dy'}{dx'}+\text{etc.}=\frac{dy}{dx}+\text{etc.} \\ \frac{d^2y'}{dx'^2}+\text{etc.}=\frac{d^2y}{dx^2}+\text{etc.} \end{array}\right.$$

en supposant qu'on ait changé x' en x, dans les expressions de y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, etc. tirées de l'équation de la courbe EY. Maintenant si on passe à la limite par la supposition de $h=0$, les trois intersections se réuniront en un seul point de contact, pour lequel on trouvera les conditions

$$y'=y$$
$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Si la courbe EY est le cercle représenté par l'équation

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=\gamma^2 \, (\textit{Trig.}\ 90),$$

en la différentiant deux fois consécutives, il en résultera

$$(x'-\alpha)+(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'}=0$$

$$1+\frac{dy'^2}{dx'^2}+(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}=0,$$

et il faudra qu'en changeant x' en x, dans ces équations, elles donnent pour y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ les mêmes valeurs que celles de la courbe proposée, ou bien qu'elles soient satisfaites lorsqu'on y substituera x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. En faisant cette dernière substitution, elles deviendront

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$$

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

mais comme les quantités dérivées de la courbe proposée sont déterminées puisqu'elles appartiennent à un point particulier M, il faudra que les quantités α, β et γ reçoivent des valeurs propres à vérifier les équations ci-dessus.

En déterminant par les deux dernières équations les valeurs de $y-\beta$ et de $x-\alpha$, pour les substituer dans la première, on trouvera

$$y-\beta=-\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$$

$$x-\alpha=\frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right)$$

$$\gamma=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}.$$

95. Le cercle dont je viens de déterminer la grandeur et la position varie pour chaque point de la courbe, puisque les quantités α, β et γ, qui le caractérisent, sont des fonctions de x et de y. Il jouit de propriétés remarquables, qu'on peut découvrir soit par des considérations géométriques, soit par des considérations analytiques. Je commencerai par exposer les premières.

Soit $MM'M''M'''$ etc. *fig.* 25, le polygone inscrit à la courbe proposée. Le cercle qui passe par les trois points M, M', M'', a son centre placé à l'intersection des droites NO et $N'O'$, perpendiculaires sur le milieu des droites MM' et $M'M''$. Si l'on combine avec les points M' et M'' un quatrième point M''', on déterminera par ces trois points un nouveau cercle dont le centre sera en O', à l'intersection des droites $N'O'$ et $N''O''$, respectivement perpendiculaires sur le milieu des côtés $M'M''$ et $M''M'''$. En concevant que la même opération soit continuée dans toute l'étendue du polygone $MM'M''M'''$ etc. les centres de tous les cercles, que l'on considérera successivement, formeront un polygone $OO'O''O'''$ etc. tel que tous ses côtés prolongés rencontreront à angle droit ceux du premier. FIG. 25.

Lorsqu'on passe aux limites, c'est-à-dire lorsqu'on substitue les courbes aux polygones, les points M, M', M'', venant à coïncider, la droite NO devient normale à la

courbe qui est la limite du polygone $MM'M''M'''$ etc. et tangente à celle qui est la limite du polygone $OO'O''O'''$ etc. et le cercle qui passe par les trois points $MM'M''$ devient le cercle osculateur. Alors à la fig. 25

FIG. 26. il faut substituer la figure 26, dans laquelle les polygones sont remplacés par les courbes DX et FZ, la seconde étant le lieu de tous les cercles osculateurs de la première, qui ont pour rayon la tangente MO.

96. Pour déduire de l'analyse les propriétés précédentes, je reprends les trois équations du n° 94; et faisant disparaître les différentielles qui entrent comme diviseurs dans les deux dernières, il vient

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy=0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$dx^2+dy^2+(y-\beta)\,d^2y=0 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

1°. La seconde donnant

$$\beta-y=-\frac{dx}{dy}(\alpha-x)$$

est (67) celle de la normale menée du point dont les coordonnées sont α et β, c'est-à-dire, du point O de la courbe FZ, au point M de la courbe proposée DX.

2°. En différentiant les deux premières équations non seulement par rapport à x, y, mais encore par rapport aux quantités α, β, et γ, en tant que ces dernières sont fonction des premières (95), on aura

$$(x-\alpha)dx+(y-\beta)dy-(x-\alpha)d\alpha-(y-\beta)d\beta=\gamma d\gamma$$
$$dx^2+dy^2+(y-\beta)d^2y-d\alpha dx-d\beta dy=0.$$

Les équations (2) et (3) réduisent celles-ci à

$$-(x-\alpha)\,d\alpha-(y-\beta)\,d\beta=y d\gamma \quad \ldots\ldots (4)$$
$$-d\alpha dx-d\beta dy=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

la dernière donne $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{dx}{dy}$, expression qui change l'équation

$$\beta-y=-\frac{dx}{dy}(\alpha-x)$$

en $$y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha);$$

et qui montre parconséquent (67) que la normale MO, est tangente dont les coordonnées sont α et β, c'est-à-dire à la courbe FZ.

3°. Si on élimine $x-\alpha$, $y-\beta$, $\frac{dy}{dx}$, entre les équations (1), (2), (4) et (5), on aura

$$d\gamma^2=d\alpha^2+d\beta^2 \text{ ou } \frac{d\gamma}{d\alpha}=\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}},$$

ce qui donne le coefficient différentiel de γ, par rapport à la variable α; or (75) cette expression est aussi celle du coefficient différentiel de l'arc de la courbe dont les coordonnées sont α et β; et il résulte de cette identité que le rayon du cercle osculateur varie par les mêmes différences que l'arc de la courbe FZ (22), propriété qui mérite la plus grande attention.

En effet, le rayon MO du cercle osculateur du point M étant tangent à la courbe FZ, a nécessairement la même direction que celle que prendrait un fil enveloppé autour de la convexité de cette courbe, lorsqu'en le développant on serait parvenu au point O. On remarquera qu'en poursuivant le développement de O en O', ce fil s'alongerait d'une quantité égale à l'arc OO' de la courbe FZ; et comme par ce qui précède, la différence des rayons OM et OM' est aussi égale au même arc OO', il s'ensuit que le bout M du

fil doit encore se trouver en M' sur la courbe proposée, qu'il n'a pas dû quitter dans le développement effectué depuis l'un de ces points jusqu'à l'autre : on peut donc regarder la courbe DX comme engendrée par le développement de la courbe FZ.

Ce procédé a une grande analogie avec la description du cercle ; c'est la courbe FZ qui fait l'office de centre, et le rayon MO, au lieu d'etre constant, varie pour chaque point. La courbe FZ s'appelle la *développée*, la courbe DX, sa *développante*, et le rayon du cercle osculateur, rayon de la *développée* (*).

En général le cercle osculateur touche et coupe la courbe, comme le fait la tangente à un point d'inflexion (78). Si les cercles osculateurs augmentent de rayon de M en M', il est visible que l'arc MM' de la courbe doit se trouver au-dessus du cercle GH, osculateur au point M, tandis que la portion MD est au-dessous. De plus, comme on peut toujours concevoir les points M et M' assez voisins l'un de l'autre, pour que la différence des rayons MO et $M'O'$ soit d'une petitesse donnée, et que si on décrit, avec un rayon $Mo = M'O'$, le cercle $G'M'H$, l'arc $D'M'$ sera entièrement au-dessous, on reconnaîtra facilement qu'il ne peut passer aucun autre cercle entre la courbe et son cercle osculateur, puisque tout cercle d'un rayon plus petit que MO passe en-dedans de l'arc GMH, tandis que tout cercle d'un rayon plus grand que Mo, se trouve au dehors de l'arc $G'MH'$.

(*) C'est par cette dernière considération qu'Huyghens a déterminé le cercle osculateur, qu'il a remarqué le premier, et elle peut conduire aussi aux formules du nº précédent ; mais ce point de vue, séparant la recherche du cercle osculateur de la théorie générale des contacts des courbes, dont elle doit faire partie, est trop borné pour l'état actuel de la science.

De tous les cercles qui touchent la courbe proposée au point M, le cercle osculateur étant donc celui qui s'en approche le plus, soit avant, soit après le contact, est parconséquent celui qui diffère le moins de cette courbe dans le point que l'on considère. La courbure du cercle est uniforme dans tous ses points; mais pour des arcs de même longueur, celle d'un petit cercle est plus considérable que celle d'un grand, ensorte que les courbures de ces arcs sont en raison inverse des rayons des cercles auxquels ils appartiennent. On peut donc, par le rayon du cercle osculateur, juger de la courbure d'une courbe dans l'un quelconque de ses points. Cette considération a fait donner au rayon du cercle osculateur le nom de rayon de *courbure*; et on voit d'après ce qui précède, que *la courbure d'une courbe est en raison inverse de son rayon de courbure.*

La développée peut aussi être considérée comme la *limite* des intersections des normales de la courbe proposée, prises deux à deux consécutivement, puisque le point K, intersection des deux rayons MO et $M'O'$, qui sont perpendiculaires à la courbe DX en M et en M', s'approche d'autant plus de la courbe FZ que les points M et M' sont plus voisins l'un de l'autre.

97. On peut prouver aussi, avec le secours de l'analyse, qu'entre la courbe proposée et son cercle osculateur, il ne saurait passer aucun autre cercle; et cette propriété conduit immédiatement aux autres.

En général, lorsque deux courbes, dont les ordonnées et les abscisses sont désignées par x et y, x' et y', ont un point commun, et dans lequel parconséquent, $x'=x$, $y'=y$, si on prend la différence des séries

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$y'+\frac{dy'}{dx'}\frac{h}{1}+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

qui expriment les ordonnées des points correspondans à l'abscisse $x+h$, on trouvera, en général,

$$\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dy'}{dx'}\right)\frac{h}{1}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3y'}{dx'^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

pour l'expression de la distance de ces courbes, dans le sens de l'ordonnée; mais si au point particulier que l'on considère, on a $\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx}$, cette distance sera réduite alors à

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)\frac{h^2}{1.2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3y'}{dx'^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Le rapport de ce développement au précédent, devenant de plus en plus petit à mesure que h décroît (56), il en résulte que la distance qu'il représente entre les deux courbes finira par être plus petite que celle qu'exprime l'autre, et que parconséquent, toute courbe pour laquelle on n'aurait pas $\frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx}$, ne peut passer entre celles qui remplissent cette condition. C'est ainsi, qu'entre une courbe et sa tangente, on ne saurait mener aucune droite par leur point de contact.

La proximité deviendrait encore plus grande si l'on avait aussi $\frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$. Aucune des courbes qui ne satisferaient qu'aux deux conditions

$$y'=y,\quad \frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx},$$

c'est-à-dire, qui n'auraient qu'un simple contact, ne pourrait, immédiatement auprès du point commun, approcher autant de la seconde courbe que le ferait la première, et ne saurait passer entre l'une et l'autre: c'est le cas des cercles simplement tangent par rapport au cercle osculateur.

On voit encore que l'expression de la différence des ordonnées ayant au premier terme le facteur h^3, qui change de signe lorsqu'on met $-h$ au lieu de $+h$, il arrive en général au cercle osculateur, ce qu'on a remarqué pour la tangente dans les points d'inflexion (74), excepté pourtant dans les cas particuliers où l'on aurait aussi

$$\frac{d^3y'}{dx'^3}=\frac{d^3y}{dx^3}.$$

Il n'est pas besoin de pousser plus loin ces considérations pour se convaincre que les courbes peuvent avoir entr'elles des contacts plus ou moins immédiats. En suivant la marche tracée dans le n° 94, on trouverait que si deux courbes avaient quatre points communs, et que l'on déterminât l'une de ces courbes de manière à faire coïncider les quatre points, on aurait en même temps.

$$y'=y,\quad \frac{dy'}{dx'}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y'}{dx'^3}=\frac{d^3y}{dx^3},$$

ce contact différerait des précédens en ce qu'aucune des courbes qui n'en auraient que de l'espèce de ces derniers, avec l'une des courbes proposées, ne pourrait passer entre celle-ci et l'autre.

En employant les conditions ci-dessus, à la détermination des constantes qui particularisent l'équation dont les variables sont x et y, on voit qu'il faudrait que cette équation contînt quatre constantes.

98. Les contacts se divisent en ordres d'après le nombre de points d'intersection qui s'y trouvent réunis, ou ce qui revient au même, d'après le nombre de termes dont ils supposent l'égalité dans les développemens des ordonnées relatives au point suivant. Le plus élevé de ceux que puisse avoir en général la courbe *touchante*, avec la courbe proposée, contact dont l'ordre est marqué par le nombre des constantes que renferme l'équation de la première, se nomme *osculation*.

Ainsi la tangente, qui ne peut avoir en général qu'un simple contact du premier ordre, avec une courbe donnée, est une *osculatrice* du premier ordre. Le cercle dont l'équation renferme trois constantes, peut avoir, ou un simple contact du premier ordre, ou un contact du second; mais ce dernier, étant le plus élevé, prend le nom d'osculation, et distingue le cercle osculateur de tous les cercles tangens.

99. Je ne m'étendrai pas beaucoup sur l'application des formules

$$\gamma = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y},$$

$$x - \alpha = \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{dxd^2y},$$

$$y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}.$$

parceque cette application n'a aucune difficulté lorsqu'on possède bien le mécanisme du Calcul différentiel.

La valeur de γ étant susceptible du double signe $\pm$, on peut demander lequel des deux il faut employer; car

Il est bien visible qu'en général, à chaque point de la courbe, il n'y a qu'un seul rayon de courbure ; et ce rayon n'étant pas dirigé suivant l'ordonnée ou l'abscisse, excepté dans quelques points particuliers, n'a pas, à proprement parler, de signe par rapport à ces lignes. La détermination de celui dont on l'affecte ordinairement dépend de la convention qu'on a établie sur le sens de la courbure par rapport à la normale. Si l'on veut que le rayon de courbure soit positif pour les courbes dont la concavité est tournée vers l'axe des abscisses, comme la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est alors négative (64), il faut affecter l'expression de γ du signe $-$; et dans ce cas le rayon de courbure deviendra négatif si la concavité de la courbe passe du côté opposé, parce-qu'il change de signe avec $\frac{d^2y}{dx^2}$. Pour se conformer à cette convention, on pourra supposer dans les applications

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y}.$$

L'équation générale des lignes du second ordre

$$y^2 = mx + nx^2$$

conduisant à

$$dy = \frac{(m+2nx)dx}{2y},$$

$$d^2y = \frac{2nydx^2-(m+2nx)dxdy}{2y^2} = \frac{[4ny^2-(m+2nx)^2]dx^2}{4y^3},$$

il en résultera

$$\gamma = -\frac{[4y^2+(m+2nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{8ny^2-2(m+2nx)^2}.$$

Si l'on substitue la valeur de y^2 dans cette expression, on aura

$$\gamma = \frac{[4(mx+2nx^2)+(m+2nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{2m^2},$$

Telle est l'expression générale du rayon de courbure dans les lignes du second ordre ; on la particularisera en donnant à m et à n les valeurs qui conviennent à chaque espèce de ces lignes (*Trig.* 147).

Ce résultat se réduit à $\frac{1}{2}m$, lorsque $x=0$; la courbure des lignes proposées est donc à leur sommet la même que celle du cercle décrit d'un rayon égal au demi-paramètre (*Trig.* 132).

En rapprochant la valeur de γ de celle qu'on a trouvée dans le n° 66 pour la normale, on verra que $\gamma = \frac{\overline{MR}^3}{\frac{1}{4}m^2}$, ou que le *rayon de courbure dans les lignes du second ordre est égal au cube de la normale divisé par le quarré du demi-paramètre.*

Dans la parabole où $n=0$, on a seulement

$$\gamma = \frac{(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$$

On appliquerait de même les expressions générales de $x-\alpha$ et de $y-\beta$; et mettant pour y sa valeur, on aurait deux équations en x, α et β, desquelles, éliminant x, on déduirait l'équation en α et β, appartenante à la développée. Je n'effectuerai ce calcul que pour la parabole. On a dans ce cas

$$dy = \frac{m\,dx}{2y}, \qquad d^2y = -\frac{m^2dx^2}{4y^3},$$

et il vient

$$y - \beta = \frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2+m^2}{4y^2}\right) = \frac{4y^3}{m^2} + y$$

$$x - \alpha = -\frac{m}{2y}\,\frac{4y^3}{m^2}\left(\frac{4y^2+m^2}{4y^2}\right) = -\frac{4y^2+m^2}{2m};$$

on conclut de là

$$-\beta = \frac{4y^3}{m^2}, \qquad x - \alpha = -\frac{2y^2}{m} - \frac{1}{2}m;$$

mettant dans chacune de ces équations, pour y sa valeur $m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, il viendra

$$-\beta = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}, \qquad x - \alpha = -2x - \frac{1}{2}m;$$

prenant ensuite la valeur de x dans le second résultat, pour la substituer dans le premier, on obtiendra

$$x = \frac{1}{3}(\alpha - \frac{1}{2}m), \qquad \beta^2 = \frac{16}{27m}(\alpha - \frac{1}{2}m)^3:$$

la dernière de ces équations appartient à la développée de la parabole. Si on y change $\alpha - \frac{1}{2}m$ en α', ou qu'on porte l'origine des abscisses en D, *fig.* 27, on pourra FIG. 27. lui donner cette forme très-simple, $\beta^2 = \frac{16\alpha'^3}{27m}$, qui montre que la courbe DF est une des paraboles du

troisième ordre (*), composée de deux branches DF et Df, dont la première engendre par son développement la branche AX de la parabole ordinaire XAx, et la seconde produit la branche Ax.

100. Il faut observer que pour la description de la parabole XAx, par le développement de la courbe FDf, le fil enveloppé autour de l'une ou de l'autre des branches DF et Df, doit avoir au point D, dans le prolongement de la tangente BD, une longueur AD égale au rayon de courbure au point A, c'est-à-dire, à la moitié du paramètre de la proposée; tout autre point, tel que I, pris sur ce fil, produirait une courbe différente. Si le point I tombait sur le point D, le rayon de courbure de la courbe décrite alors, serait nul à son origine, et parconséquent elle aurait à ce point une courbure infinie (96).

On voit aussi que puisque la longueur de l'arc DF est égale à la différence qui se trouve entre le rayon de courbure correspondant MF, et le rayon de courbure AD qui appartient à l'origine, la courbe FDf est *rectifiable*, c'est-à-dire qu'on peut assigner une ligne droite qui lui soit égale en longueur.

Cette remarque est générale, car puisqu'on peut toujours parvenir à l'expression du rayon de courbure des courbes algébriques, les développées de ces courbes sont toutes rectifiables.

(*) L'équation $y^2 = mx$ étant généralisée ainsi: $y^q = mx^p$, représente une famille de courbes dont la parabole ordinaire n'est qu'un cas particulier; on les nomme aussi *paraboles*, mais on les distingue par l'exposant de leur degré.

Des courbes transcendantes.

101. Je n'ai considéré jusqu'ici que des courbes algébriques, je vais maintenant faire connaître quelques-unes des courbes transcendantes les plus remarquables : on nomme ainsi celles dont l'équation ne peut s'obtenir en termes algébriques. Je m'occuperai d'abord de la *Logarithmique* ou de la courbe dans laquelle les ordonnées sont les logarithmes des abscisses.

On a dans cette courbe $y = \mathrm{l}x$, et quand on prend $x = 1$, il vient $y = 0$, ce qui fait voir qu'elle rencontre l'axe AB au point E, *fig.* 28, où l'abscisse AE est égale à l'unité. La branche EX, qui répond aux abscisses positives plus grandes que l'unité, est infinie, puisque les logarithmes de ces abscisses croissent toujours. Dans la partie AE, où les abscisses sont des fractions, les ordonnées sont négatives et augmentent à mesure que ces fractions diminuent, ensorte que la branche Ex a pour asymptote la partie négative Ac de l'axe des ordonnées : enfin la logarithmique ne s'étend point du côté des abscisses négatives, parceque leurs logarithmes sont imaginaires. (*Voyez* le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*). FIG. 28.

En différentiant l'équation $y = \mathrm{l}x$, il vient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{M}{x} \ (27);$$

on voit par là que la tangente de cette courbe est perpendiculaire à la ligne des abscisses lorsque $x = 0$, et qu'elle ne lui est parallèle qu'en supposant x infini (77). L'expression générale de la soutangente (65) donne

$PT=\frac{xy}{M}$; mais en chassant y on introduit le logarithme de x, ainsi cette expression est transcendante; cependant en prenant la soutangente OD sur l'axe AC, on aura $OD=\frac{x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=M$, résultat bien remarquable, puisqu'il prouve que la soutangente OD est constante et égale au module, pour tous les points de la courbe. On trouverait de même que la tangente, la sounormale et la normale, prises par rapport à l'axe AB, sont transcendantes à cause que l'ordonnée y entre dans leur expression, mais qu'elles deviennent algébriques, lorsqu'on les considère à l'égard de l'axe AC.

Je passe à la recherche du rayon de courbure On a

$$1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{x^2+M^2}{x^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{M}{x^2},$$

d'où (94) $\gamma=\frac{(x^2+M^2)^{\frac{3}{2}}}{Mx}$,

$$y-\beta=\frac{(x^2+M^2)}{M},\quad x-\alpha=-\frac{(x^2+M^2)}{x}.$$

Je ne m'arrêterai point à considérer la développée, qui serait nécessairement transcendante; j'observerai seulement qu'on pourrait obtenir immédiatement l'équation différentielle de cette courbe, en éliminant par le moyen des valeurs de $y-\beta$, de $x-\alpha$ et de leurs différentielles, x, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ de l'équation $\mathrm{d}y=M\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Les logarithmiques diffèrent entr'elles à raison du module relatif au système de logarithmes qu'elles re-

présentent. L'équation $x=a^y$ donne, en prenant les logarithmes Népériens, $l'x=yl'a$, d'où

$$y=\frac{l'x}{l'a},$$

résultat dont le second membre n'est autre chose que le logarithme de x calculé pour un module égal à $\frac{1}{l'a}$: cette équation appartient donc à une logarithmique.

102. La *cycloïde* ou la courbe décrite par un point pris sur la circonférence d'un cercle, pendant que ce cercle roule sur une ligne droite donnée de position, est encore une courbe transcendante; la relation entre ses ordonnées et ses abscisses, dépend des arcs du cercle générateur : voici comment on peut l'exprimer.

L'origine du mouvement du cercle étant arbitraire, je la prends au point A, *fig.* 29, où le point *décrivant* M, se trouvait sur la droite AB parcourue par le cercle générateur QMG. Puisque ce cercle, en roulant, applique successivement tous les points de sa circonférence sur la droite AB, il est évident que lorsqu'il est parvenu dans une situation quelconque QMG, la distance AQ est égale à l'arc MQ, compris entre le point M qui touchait la droite AB en A, et le point Q qui la touche dans la position actuelle. FIG. 29.

Si on élève sur AB, par le point Q, la perpendiculaire QO, qui passera par le centre du cercle générateur, et qu'on mène MN parallèle à AB : MN sera le sinus de l'arc MQ, et NQ en sera le sinus verse (*Trig.* 5).

Soit

$$QO = a, \quad AP = x, \quad PM = QN = y$$

et on aura

$$MN = \sqrt{2ay - y^2}, \quad x = AQ - PQ = \text{arc}\, MQ - MN,$$

ou $x =$ arc (dont y est le sin. verse) $- \sqrt{2ay - y^2}$: c'est là l'équation primitive de la cycloïde. (*)

L'arc MQ peut aussi s'indiquer par son sinus MN, ou $\sqrt{2ay - y^2}$; et on le fait disparaître par la différentiation, en se servant de la formule du n° 75, dans laquelle a représente aussi le rayon et où le sinus est désigné par x. En substituant $\sqrt{2ay - y^2}$, au lieu de x dans cette formule, on en tirera

$$\text{d.arc}\, MQ = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

et on aura ensuite

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}} - \frac{ady - ydy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

ou

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}:$$

telle est l'équation différentielle de la cycloïde.

(*) Si on voulait calculer la longueur de l'arc MQ, d'après son sinus, par le moyen des tables trigonométriques, afin de construire la courbe, il faudrait d'abord rapporter au rayon 1 le sinus MN, relatif au rayon a, et l'on aurait $\frac{MN}{a}$, ou $\frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}$. Désignant par t la longueur de l'arc relatif à ce dernier sinus, celle de l'arc MQ aura nécessairement, avec le *quadrans* du cercle dont il fait partie, le même rapport que l'arc t, avec le *quadrans* des

Rien n'est plus facile maintenant que d'obtenir les expressions de la soutangente et de la tangente, de la sounormale et de la normale, dans la cycloïde. On trouve, par les formules générales du numéro 65,

$$PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}, \qquad MT = \frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

$$PR = \sqrt{2ay - y^2}, \qquad MR = \sqrt{2ay}.$$

On peut construire ces valeurs d'une manière très-simple ; car il est aisé de remarquer que MP ou y étant considéré comme l'abscisse QN dans le cercle générateur QMG, la valeur donnée ci-dessus pour PR est précisément celle de l'ordonnée MN de ce cercle, et que, parconséquent, la normale se conforme avec la corde de l'arc MQ, comme on peut le voir aussi par l'expression de MR : il suit de là que la tangente MT est le prolongement de la corde MG. Si on imagine que le cercle QMG glisse sur le point Q pour atteindre une position quelconque qmg, les lignes mq et mg resteront, malgré ce changement, parallèles aux lignes MQ et MG ; il suffira donc, pour construire la tan-

---

tables ; il en résultera

$$\text{arc } MQ = at,$$

$$x = at - \sqrt{2ay - y^2},$$

et $t =$ arc, dont le sinus $= \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}$.

L'expression de x, en y mettant pour t sa valeur, s'écrit ainsi :

$$x = \text{arc}\left(\sin = \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}\right) - \sqrt{2ay - y^2};$$

et en différentiant d'après la règle du n° 32, on retombe sur le résultat que j'ai donné ci-dessus.

gente et la normale dans un point donné M, de rapporter ce point sur le cercle fixe qmg, ce qui se fera en tirant la droite Mm parallèle à AB, et de mener ensuite MT parallèlement à mg et MQ parallèlement à mq.

103. Je passe à la recherche du rayon de courbure. En différentiant l'équation

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

j'obtiens, puisque dx est constant,

$$0 = (yd^2y + dy^2)\sqrt{2ay - y^2} - \frac{ydy(ady - ydy)}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

réduisant et divisant par y, il vient

$$0 = (2ay - y^2)\, d^2y + ady^2,$$

d'où je tire

$$d^2y = -\frac{ady^2}{2ay - y^2}:$$

substituant cette valeur et celle de dy dans l'expression du rayon de courbure (94), je trouve, après les réductions nécessaires,

$$\gamma = 2^{\frac{3}{2}}(ay)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Ce résultat fait voir que le rayon de courbure MM' est double de la normale MQ, et qu'il ne peut par conséquent devenir plus grand que le double du diamètre du cercle générateur, diamètre qui est à-la-fois l'ordonnée et la normale de la cycloïde au point I, où le contact Q a parcouru la moitié de la circonférence.

Les expressions de $x-\alpha$ et de $y-\beta$ donnent ensuite

$$y-\beta=2y, \quad x-\alpha=-2\sqrt{2ay-y^2};$$

on conclut de là

$$y=-\beta, \quad x=\alpha-2\sqrt{-2a\beta-\beta^2}.$$

En substituant ces valenrs dans l'équation primitive de la cycloïde, et réduisant on obtient

$$\alpha=\text{arc (dont} -\beta \text{ est le sin. verse)}+\sqrt{-2a\beta-\beta^2},$$

résultat qui a beaucoup d'analogie avec cette équation. Le radical $\sqrt{-2a\beta-\beta^2}$ devient semblable à $\sqrt{2ay-y^2}$ lorsqu'on fait $\beta=-2a+\beta'$, ce qui revient à prendre aulieu de l'ordonnée EM', toujours négative, l'ordonnée $P'M'$ rapportée à un axe $A'B'$ placé au-dessous de AB à une distance $A'I=2a$. Par cette transformation il vient

$$\alpha=\text{arc(dont } 2a-\beta' \text{ est le sin. verse)}+\sqrt{2a\beta'-\beta'^2}:$$

puis si on observe que deux arcs dont les sinus verses réunis composent le diamètre, sont supplément l'un de l'autre et qu'on désigne la demi-circonférence par π, on pourra écrire

$$\alpha=\pi-\text{arc(dont } \beta' \text{ est le sinus verse)}+\sqrt{2a\beta'-\beta'^2}.$$

Prenant enfin $\alpha=\pi-\alpha'$, c'est-à-dire, substituant à l'abscisse AE, l'abscisse $A'P'=AI-AE$, il viendra

$$\alpha'=\text{arc (dont } \beta' \text{ est le sin. verse)}-\sqrt{2a\beta'-\beta'^2},$$

équation d'une cycloïde dont l'origine est au point A', et décrite sur l'axe $A'B'$, par le même cercle générateur que la proposée, mais dans le sens $A'B'$ contraire à AB.

La même conséquence peut se tirer immédiatement de la détermination du rayon de courbure. En prolongeant la droite GQ jusqu'à ce qu'elle rencontre $A'B'$

en Q', et menant $Q'M'$, on formera les triangles GMQ et $QM'Q'$ égaux entr'eux : l'angle $QM'Q'$ sera donc droit ; et si on décrit sur QQ', comme diamètre, un cercle, il passera par le point M' et sera égal au cercle générateur. Cela posé, puisque l'arc $M'Q'$ est le supplément de $M'Q$, qui lui-même est égal à MQ, on aura

$$\text{arc } M'Q' = QMG - \text{arc } MQ$$
$$= AI - AQ = QI = A'Q',$$

ce qui montre bien clairement que la développée $A'M'A$, est une cycloïde décrite par le cercle $QM'Q'$, roulant sur $A'B'$ de A' vers B'.

On remarquera sans doute que, d'après ce qui précède, la cycloïde est rectifiable, puisqu'elle est elle-même sa développée, et que l'expression de son rayon de courbure est algébrique ; et on en déduira ce résultat curieux, que la longueur de l'arc $A'A$, ou de son égal AK, qui compose la moitié de la branche décrite par une révolution entière du cercle générateur, est précisément la même que celle de $A'K$, ou du double du diamètre de ce cercle.

La cycloïde n'est pas terminée au point L où le cercle a parcouru sur la droite AL, sa circonférence entière, car rien ne limite la durée de ce mouvement. Il faut bien remarquer, dans la description des courbes, que les diverses parties résultantes d'une même construction ou d'un même mouvement, appartiennent toutes à la même courbe. Ainsi le cercle QMG, en continuant de rouler sur la droite AB, au-delà du point L, décrit une suite de portions semblables à AKL ; et il faut en concevoir autant sur la gauche du point A, puisque le cercle a pu n'arriver à ce point qu'à la suite d'un mouvement commencé depuis un temps infini. L'équation de la courbe

conduit à ces remarques, car rien n'empêche d'y supposer l'arc QM, augmenté ou diminué d'autant de circonférences que l'on voudra. On voit d'ailleurs que y ne pourra jamais surpasser $2a$. Il suit de là que la cycloïde, conçue dans toute l'étendue qu'elle doit avoir, peut être coupée par une même ligne droite, dans une infinité de points.

Le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant égal à $-\frac{a}{y}$, est toujours négatif, puisque y est toujours positif; mais il devient infini ainsi que $\frac{dy}{dx}$ quand $y=0$, ce qui arrive lorsque l'arc MQ est nul ou égal à un multiple quelconque de la circonférence : dans les mêmes cas les points A, L, etc. où se touchent les différentes branches de la cycloïde sont donc des points de rebroussement de la première espèce, dans lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses (83).

104. Les spirales composent encore un ordre de courbes transcendantes, remarquables par leur forme et leurs propriétés. Voici comment s'engendre celle qu'imagina Conon de Syracuse, et dont Archimède découvrit les principales propriétés.

Pendant que le rayon AO, *fig.* 30, se meut autour FIG. 30.
du centre A du cercle OGQ, un point mobile, parti de ce centre, parcourt uniformément la ligne AO, et avec une vîtesse telle qu'il arrive au point O, en même temps que cette droite a achevé sa révolution. Il suit de là que pour un point quelconque M de la spirale $AMOM'X$, le rapport de AM à AN, est le même que celui de l'arc ON à la circonférence OGO; mais comme rien ne s'oppose à ce que le point *décrivant* continue son mouvement au-delà du point O, sur la

rayon prolongé, et que ce rayon peut lui-même faire un nombre indéfini de révolutions la courbe AMO se prolongera en tournant toujours autour du point A, de manière que le rapport entre la distance de chacun de ses points au point A et le rayon du cercle, soit égal à celui qui se trouve entre l'arc parcouru par le point O, depuis le commencement du mouvement et la circonférence entière. En M', par exemple, où le rayon AN a fait une révolution plus l'arc ON, on aura

$$\frac{AM'}{AN}=\frac{OGO+ON}{OGO}.$$

Si donc on fait

$$ON=t, \qquad AM=u,$$

et que, prenant pour unité le rayon AN, on représente par 2π la circonférence OGO, on aura $u=\frac{t}{2\pi}$.

Les variables de cette équation sont ce que les géomètres appellent des *coordonnées polaires*. Le centre A du cercle OGO, se nomme le *pôle*; la ligne AM, assujétie à passer toujours par ce point, est le *rayon vecteur*, et tient lieu de l'ordonnée de la courbe, tandis que l'arc ON remplace l'abscisse.

La spirale que je viens de considérer, et qui porte le nom de *spirale d'Archimède* n'est qu'un cas particulier des courbes que représente l'équation $u=at^n$, en donnant à n toutes les valeurs possibles. Lorsqu'on fait $n=-1$, on a $u=at^{-1}$ ou $ut=a$, équation qui appartient à la *spirale hyperbolique*.

Si au lieu de la distance AM, on prenait pour u la partie MN du rayon vecteur, comprise entre le point M et la circonférence du cercle OGO, l'équation

u^2

$u^2 = at$ serait celle de la spirale parabolique, ou de la courbe qu'on formerait en roulant l'axe d'une parabole autour du cercle OG; les ordonnées se trouveraient alors perpendiculaires à la circonférence de ce cercle, et tomberaient sur ses rayons.

Tant que n est un nombre positif, les spirales données par l'équation $u = at^n$, prennent leur origine au point A; mais quand n est négatif, u, d'abord infini, lorsque $t = 0$, diminue à mesure que cet arc augmente, et à chaque nouvelle révolution le point décrivant s'approche du point A sans pouvoir jamais y atteindre.

105. Lorsqu'on rapporte les courbes à des coordonnées polaires, la différentielle première du rayon vecteur AM, *fig.* 31, est la partie QM' retranchée du rayon vecteur suivant, par l'arc de cercle MQ décrit du point A comme centre, avec le rayon MA. On regarde ce petit arc comme une ligne droite (74), et le triangle MQM' comme rectiligne, ce qui donne $MM' = \sqrt{\overline{QM}^2 + \overline{QM'}^2}$. Lorsqu'on mesure l'angle MAM' par un arc de cercle NN' décrit d'un rayon AN égal à l'unité, on a $QM = udt$, et QM' étant du, il vient $MM' = \sqrt{du^2 + u^2dt^2}$. FIG. 31.

106. Si on mène AT parallèle à la corde du petit arc QM, et qu'on prolonge jusqu'à la rencontre de cette droite le côté MM' du polygone inscrit à la courbe, on aura par la similitude des triangles $M'QM$ et $M'AT$,

$$\frac{QM'}{QM} = \frac{AM'}{AT}.$$

Lorsqu'on passe aux limites, la corde QM peut être prise pour l'arc, l'angle QMA doit être regardé comme droit, la ligne MT comme tangente à la courbe, AT comme perpendiculaire à AM qui se confond alors avec AM', et l'on a

$$\frac{du}{udt}=\frac{u}{AT},$$

d'où l'on conclura

$$AT=\frac{u^2dt}{du}.$$

107. La différentielle seconde d^2u, étant prise pour la différence entre deux différentielles premières consécutives (62), sera représentée par $M''Q'-M'Q$; et il faut observer que lorsqu'on suppose l'arc NN' constant, ou qu'on fait toujours varier l'angle t de la même quantité, les arcs QM, $Q'M'$, ne sont pas pour cela égaux entr'eux, car ils sont tous de rayons différens.

On pourrait déduire de là les expressions des tangentes, des normales, etc.; mais j'ai préféré d'appliquer aux courbes qui sont rapportées à des coordonnées polaires, les expressions des soutangentes, des tangentes, etc. trouvées relativement à des coordonnées rectangles, parceque cette marche fournit l'occasion de transformer les coordonnées du premier système dans celles du second, et de montrer comment on peut passer de l'un à l'autre. Cela sera d'autant plus utile, qu'on rapporte quelquefois les courbes algébriques à des coordonnées polaires; on le fait surtout à l'égard des courbes du second degré, en prenant leur foyer pour pôle.

FIG. 30. 108. Je placerai au point A, *fig.* 30, pour plus de simplicité, l'origine des coordonnées rectangles

$$AP=x,\quad PM=y;$$

et pour fixer la position de l'axe AB des abscisses, je désignerai par m l'arc QO compris entre cet axe et le point O, origine de l'arc t. En menant PM per-

pendiculaire sur AB, et en observant que l'angle MAP est mesuré par l'arc NQ égal à $t-m$, on trouvera

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2,$$
$$AP = AM \cos NQ,$$
$$PM = AM \sin NQ,$$

ou

$$u = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$x = u\cos(t-m),$$
$$y = u\sin(t-m).$$

Au moyen des deux dernières valeurs, on changera toute équation algébrique entre x et y, dans une autre qui ne contiendra plus que le sinus, le cosinus de l'arc t, et le rayon vecteur u. Ces valeurs donnent aussi

$$\cos(t-m) = \frac{x}{u}, \quad \sin(t-m) = \frac{y}{u},$$

d'où on tirera des valeurs de $\cos t$ et de $\sin t$ en x, y, u, $\sin m$ et $\cos m$, qui, substituées dans une équation quelconque entre u, $\sin t$ et $\cos t$, conduiront à un résultat ne renfermant plus que x et y, puisqu'on pourra remplacer u par $\sqrt{x^2+y^2}$.

Si, pour abréger, on suppose que la ligne AB se confonde avec la ligne AO, on aura seulement

$$\cos t = \frac{x}{u}, \qquad \sin t = \frac{y}{u}.$$

Lorsque l'équation en u et t, qu'on se propose de transformer, contient l'arc t lui-même, il n'est plus possible d'obtenir une relation algébrique entre x et y, puisqu'on n'en a point de semblable entre l'arc t, son sinus et son cosinus; mais on parvient ainsi qu'on va

K 2

le voir, à une équation différentielle, qui ne contient plus que x, y, dx et dy.

On tire des valeurs trouvées ci-dessus, pour u, x et y,

$$du = d.\sqrt{x^2+y^2},$$
$$dx = du\cos(t-m) - udt\sin(t-m),$$
$$dy = du\sin(t-m) + udt\cos(t-m);$$

si on élimine du des deux dernières équations, il viendra

$$dt = \frac{dy\cos(t-m) - dx\sin(t-m)}{u};$$

mettant pour $\cos(t-m)$, $\sin(t-m)$ et u, leurs valeurs, on aura

$$dt = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

On pourra donc chasser de l'équation en u et t, et de sa différentielle, les quantités u, $\cos t$, $\sin t$, du et dt; les deux résultats qu'on obtiendra ne contenant plus que t, on le fera disparaître par l'élimination.

Soit pour exemple l'équation $u = at^n$, qui donne

$$u = a^{\frac{1}{n}}t, \qquad \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,du = a^{\frac{1}{n}}dt;$$

les expressions de u, de du et de dt, étant indépendantes de l'angle m, il viendra, en les substituant et en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1}{n}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}(xdx+ydy) = a^{\frac{1}{n}}(xdy - ydx).$$

Avec cette équation on déterminerait les soutan-

gentes, les tangentes, etc. des spirales, en faisant usage des formules du n° 65; mais il sera plus simple et en même temps plus général de transformer ces formules relativement aux variables u et t, et c'est ce que je vais faire.

109. L'expression de la soutangente devient, en mettant pour y et $\frac{dx}{dy}$ leurs valeurs,

$$PT = u\sin(t-m)\frac{du\cos(t-m) - udt\sin(t-m)}{du\sin(t-m) + udt\cos(t-m)}.$$

On simplifiera beaucoup ce résultat, en observant que la situation de la ligne des abscisses, sur laquelle tombe la distance PT, est arbitraire, et qu'on peut parconséquent prendre toujours m tel que l'arc QN, soit 1q, auquel cas l'ordonnée PM se confond avec le rayon vecteur AM, $\cos(t-m)=0$, $\sin(t-m)=1$, et PT se change en $AT' = -\frac{u^2dt}{du}$.

On construira la tangente en menant par le point A une perpendiculaire au rayon vecteur AM, et en portant sur cette droite la valeur de AT', donnée par la formule ci-dessus.

Si on applique cette formule à l'équation $u = at^n$, on trouvera

$$AT' = -\frac{u^2}{nat^{n-1}} = -\frac{a}{n}t^{n+1}.$$

Dans la spirale de Conon, on a $n=1$ et $a=\frac{1}{2\pi}$; il en résulte $AT' = -\frac{t^2}{2\pi}$. On voit par cette expression que

lorsque $t=2\pi$, ou qu'après une révolution du rayon décrivant, la soutangente est égale à la circonférence rectifiée; on trouvera une soutangente quadruple au bout de deux révolutions, et ainsi de suite, comme l'a remarqué Archimède.

Lorsque $n=-1$, ce qui est le cas de la spirale hyperbolique, on a $AT'=a$, c'est-à-dire, que la soutangente de cette courbe est constante.

Je ne m'arrête point à la recherche de la sounormale et de la normale, parcequ'on les obtient facilement lorsque la soutangente est connue.

J'observerai seulement que $\frac{AT'}{AM}=\frac{udt}{du}$, exprime la tangente de l'angle que fait avec le rayon vecteur AM la droite $T'M$, qui touche la courbe au point M, et qu'on a

$$T'M=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{AT'}^2}=u\sqrt{1+\frac{u^2dt^2}{du^2}}.$$

110. Si dans la différentielle de l'arc AM, qui est

$$dz=\sqrt{dx^2+dy^2}\ (75),$$

on substitue pour dx et dy leurs valeurs en coordonnées polaires, on aura

$$dz=\sqrt{du^2+u^2dt^2},$$

ainsi qu'on le conclurait immédiatement en regardant
FIG. 31 le triangle curviligne $MM'Q$, *fig.* 31, comme rectiligne et rectangle, forme dont il diffère d'autant moins que les points M et M' sont plus rapprochés.

111. La différentielle de l'aire ADM, prise rela-

tivement aux coordonnées polaires, n'est pas un trapèze, comme dans le cas des ordonnées parallèles, mais un secteur AMM'. En passant aux limites, le rapport de ce secteur avec la différentielle NN' sera le même que la limite des rapports que les secteurs AMQ, $AM'R$, entre lesquels il se trouve compris et qui tendent vers l'égalité, ont avec la même différentielle NN'. On conclura de là que l'aire ADM étant représentée par s, on doit avoir

$$\frac{ds}{dt}=\frac{AM\times MQ}{2NN'}=\frac{u^2}{2}, \quad \text{ou} \quad ds=\frac{u^2dt}{2}.$$

On rencontre souvent l'expression du secteur ds, en coordonnées rectangles, et il est parconséquent utile de la remarquer. Elle se déduit de la précédente, en mettant pour dt et pour u^2 leurs valeurs trouvées dans le n° 108; il vient alors

$$ds=\frac{xdy-ydx}{2}.$$

112. Je passe à la recherche du rayon de courbure. Ici on doit observer que la formule

$$-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} \quad (94),$$

suppose que l'accroissement dx demeure constant dans toutes les différentiations que subit la fonction y, et que comme les coordonnées polaires t et u sont des fonctions de x et de y, elles sont implicitement des fonctions de x, et varient parconséquent ainsi que leurs différentielles, lorsque cette dernière quantité reçoit des changemens. Il faudra donc différentier les deux équations

$$dx = du\cos(t-m) - udt\sin(t-m),$$
$$dy = du\sin(t-m) + udt\cos(t-m),$$

en y faisant varier à-la-fois dy, du, dt; et elles donneront

$$0 = d^2u\cos(t-m) - 2dudt\sin(t-m) - ud^2t\sin(t-m) - udt^2\cos(t-m)$$
$$d^2y = d^2u\sin(t-m) + 2dudt\cos(t-m) + ud^2t\cos(t-m) - udt^2\sin(t-m).$$

FIG. 30. La position de la ligne *AB*, *fig.* 30, étant arbitraire, on peut, pour simplifier ces expressions, supposer qu'elle soit perpendiculaire sur *AM* (109), et faire en conséquence $t - m = 1^q$; il en résultera

$$\sin(t-m) = 1, \qquad \cos(t-m) = 0,$$
$$dx = -udt, \qquad dy = du,$$
$$0 = -2dudt - ud^2t, \quad d^2y = d^2u - udt^2,$$

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = -\frac{(du^2+u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{udt(d^2u-udt^2)} = MF.$$

Lorsqu'on appliquera la dernière formule, il sera nécessaire de faire varier en même temps les deux différentielles du et dt des coordonnées polaires u et t, en assujétisant la différentielle d^2t à l'équation

$$0 = -2dudt - ud^2t,$$

qui établit une relation entre d^2t et $dudt$, c'est-à-dire, qu'il faudra, dans l'expression de d^2u, substituer, au lieu de d^2t sa valeur, tirée de l'équation ci-dessus.

113. Au lieu de calculer les expressions des coor-

données α et β de la développée (94); on a coutume, lorsqu'on fait usage des coordonnées polaires, de déterminer la position du centre du cercle osculateur par celle de la normale et par la distance ME, comprise entre le point M et le pied de la perpendiculaire EF, abaissée du centre F du cercle osculateur sur la droite AM, ce qui donne quelquefois de l'élégance à la construction du rayon de courbure.

La ligne AM étant prise pour l'axe des ordonnées y, la partie AE represente l'ordonnée β de la développée; et parconséquent

$$ME = AM - AE = y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}:$$

donc
$$ME = -\frac{(du^2 + u^2dt^2)}{d^2u - udt^2}.$$

114. Pour faire une application des formules précédentes, je prends la *spirale logarithmique* dont l'équation est $t = lu$. En différentiant, il vient (27)

$$dt = M\frac{du}{u} \quad \text{ou} \quad \frac{udt}{du} = M,$$

ce qui montre (109) que dans tous les points de cette courbe, la tangente fait le même angle avec le rayon vecteur.

Une seconde différentiation effectuée sur l'équation

$$udt - Mdu = 0,$$

et dans laquelle dt et du varieront en même temps, donnera

$$ud^2t + dudt - Md^2u = 0;$$

mettant pour ud^2t sa valeur $-2dudt$ (112), il viendra

$$-dudt - Md^2u = 0,$$

et si l'on substitue dans les expressions de MF et de ME cette valeur de d^2u, puis celle de dt en du, on aura

$$MF = \frac{u\sqrt{1+M^2}}{M}, \quad ME = u = AM.$$

FIG. 32. Il suit de là que la droite AF, *fig.* 32, menée perpendiculairement au rayon vecteur AM, rencontrera la normale MF au centre du cercle osculateur, ou sur le point correspondant de la développée FZ.

Cette développée sera une spirale semblable à la proposée ; car l'angle AFM étant égal à $T''MA$, sera le même pour tous les points de la courbe FZ, comme pour ceux de la courbe AX.

Du changement de la variable indépendante, ou comment on change la différentielle qu'on a prise pour constante, en une autre qui ne le soit plus.

115. Dans la recherche du rayon de courbure, pour les coordonnées polaires, j'ai regardé les variables u et t comme étant implicitement des fonctions de x, et j'ai fait en conséquence varier en même temps les deux différentielles du et dt; cependant, puisqu'on peut considérer l'équation de la courbe proposée entre les coordonnées polaires u et t, indépendamment des coordonnées rectangles x et y, on peut aussi regarder u comme fonction de t, et prendre dt pour un accroissement constant de cettedernière variable qui est alors indépendante de toute autre. Sous ce point

de vue, il faut faire $d^2t = 0$, mais on doit préalablement changer les formules des n°s 112 et 113, dans lesquelles on a toujours supposé que x était la variable indépendante et que dx était constant.

J'observe d'abord qu'en prenant t et u pour fonctions de la variable x, on a

$$dt = p dx, \quad du = q dx,$$

et parconséquent

$$\frac{du}{dt} = \frac{q}{p}.$$

Différentiant dans la même hypothèse, où l'on regarde dt et du comme des fonctions implicites de x et de dx, chaque membre de cette équation, il vient

$$d\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{pdq - qdp}{p^2} = \frac{\frac{dt}{dx}\frac{d^2u}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{d^2t}{dx}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2},$$

ce qui revient à

$$d\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{dtd^2u - dud^2t}{dt^2},$$

ainsi qu'il résulterait de la différentiation immédiate de la fraction $\frac{du}{dt}$ (12). Dans cette hypothèse, le coefficient différentiel de la fonction $\frac{du}{dt}$, ou la limite du rapport de $d.\frac{du}{dt}$ à dt, n'est plus exprimé par $\frac{d^2u}{dt^2}$, comme lorsqu'on prend t pour variable indépendante, mais par

$$\frac{1}{dt}\,d\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{dtd^2u-dud^2t}{dt^3}.$$

Si donc on fait

$$\frac{du}{dt}=m\,,\qquad \frac{dm}{dt}=n\,,$$

en regardant m et n comme des fonctions implicites de t, on aura

$$n=\frac{dtd^2u-dud^2t}{dt^3};$$

et par l'équation $0=2dudt^2+ud^2t$ du n° 112, il vient

$$d^2t=-\frac{2du\,dt}{u}\quad \text{et}\quad n=\frac{ud^2u+2du^2}{udt^2}.$$

Maintenant il suit de la nature même du Calcul différentiel que toutes les expressions que fournit ce Calcul doivent être indépendantes des valeurs des accroissemens, et doivent parconséquent se transformer en d'autres qui ne contiennent plus que les fonctions déterminées m, n, etc. En effet, on a par ce qui précède

$$du=mdt,\qquad d^2u=\frac{nudt^2-2du^2}{u}=\frac{(nu-2m^2)\,dt^2}{u};$$

substituant dans les expressions de MF et de ME, on obtiendra

$$MF=\frac{(m^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}{2m^2-nu+u^2}$$

$$ME=\frac{u\,(m^2+u^2)}{2m^2-nu+u^2},$$

formules délivrées des accroissemens, et ne contenant

plus que les fonctions m et n qui sont les limites de leurs rapports; mais quand on prend t pour variable indépendante, les fonctions m et n sont représentées par $\frac{du}{dt}$ et $\frac{d^2u}{dt^2}$; et l'on a en conséquence

$$MF = \frac{(du^2 + u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2dt - udtd^2u + u^2dt^3}$$

$$ME = \frac{u(du^2 + u^2dt^2)}{2du^2 - ud^2u + u^2dt^2},$$

formules qui supposent u immédiatement fonction de t. Ainsi pour les appliquer, il faudra, en différentiant l'équation proposée en u et t, faire dt constant.

116. Il est souvent utile de faire l'inverse de ce qui précède, c'est-à-dire, de transformer une expression différentielle prise en regardant y comme une fonction de x, en une autre où x et y soient toutes deux envisagées comme des fonctions d'une troisième variable quelconque z, que l'on supposera indépendante.

Le coefficient $p = \frac{dy}{dx}$ revient alors à

$$p = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}};$$

on doit donc regarder aussi dy et dx comme des fonctions de z, et les différentier en conséquence, ce qui donnera

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2}:$$

faisant ensuite $dp = q dx$, on trouvera

$$q = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}.$$

En poursuivant de la même manière, on aura

$$dq = d\left(\frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right)$$

$$= \frac{dx^2 d^3y - 3dx d^2x d^2y + 3dy d^2x^2 - dx dy d^3x}{dx^4},$$

posant $dq = r dx$, on obtiendra

$$r = \frac{dx^2 d^3y - 3dx d^2x d^2y + 3dy d^2x^2 - dx dy d^3x}{dx^5}.$$

C'est ainsi que les quantités p, q, r, etc. qui sont des fonctions implicites de x, s'expriment au moyen de dx, dy, d^2x, etc. regardées comme des fonctions de z; et en substituant ces valeurs dans quelque formule que ce soit, ramenée à ne contenir que des coefficiens différentiels, on la transformera sous le point de vue général proposé.

L'expression du rayon de courbure, par exemple,

$$\gamma = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y},$$

étant mise d'abord sous la forme

$$\gamma = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

deviendra

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

117. Les expressions de q, r, etc. sont indéterminées, tant qu'on n'assigne aucune relation entre les variables x, y et z ; mais l'effet de cette relation établit une dépendance entre d^2x et d^2y, puisque z pouvant aussi être envisagé comme une fonction de x et de y, dz en est pareillement une de ces variables et de leurs différentielles, et la supposition de dz constant emporte l'équation $d^2z = 0$.

Il n'est pas même nécessaire, pour obtenir cette dernière, de connaître la relation primitive entre x, y et la variable z qu'on veut regarder comme indépendante ; il suffit d'avoir l'expression de dz.

Si l'on prenait, par exemple, pour cette variable l'arc de la courbe proposée, on aurait alors (75)

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

et en différentiant dx et dy comme des fonctions de z, il viendrait

$$dxd^2x + dyd^2y = 0;$$

chassant à l'aide de cette équation et de ses différentielles, les différentielles d^2x, d^3x, etc. des expressions de q, r, etc. on aurait les formes que prennent les coefficiens différentiels lorsqu'on fait varier x et y, en conséquence du changement de l'arc z, ou lorsqu'on regarde cet arc comme la variable indépendante, ou enfin lorsqu'on prend sa différentielle pour constante.

Les considérations géométriques répondent très-clairement à cette circonstance ; car il est visible que pour particulariser le polygone $MM'M''$ etc. *fig.* 2, qu'on se propose d'inscrire dans une courbe quelconque CM, il faut assigner une loi dans la succession des angles de FIG. 2.

ce polygone. J'ai d'abord pris les différences d'abscisses PP', $P'P''$, etc. égales entr'elles; mais on peut remplacer cette loi par toute autre : supposer, par exemple, que les côtés MM', $M'M''$, etc. soient égaux.

On peut aussi faire à volonté

$$dz = dx, \quad \text{ou} \quad dz = dy,$$

d'où il résulte

$$d^2x = 0 \quad \text{ou} \quad d^2y = 0;$$

et par le moyen de ces hypothèses, on prend alternativement x ou y pour variable indépendante ; c'est-à-dire que l'on regarde y comme fonction de x ou x comme fonction de y. Dans le premier cas

$$q = \frac{d^2y}{dx} \text{ et dans le second } q = -\frac{dyd^2x}{dx^3}.$$

Si on met cette dernière valeur dans l'expression

$$\gamma = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

on la transformera immédiatement en celle qui convient au cas où l'on regarde x comme fonction de y, et qui est

$$\gamma = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x},$$

Tout ce qui précède ne porte que sur les signes et n'est enfin qu'une manière particulière d'écrire les coefficiens différentiels ; car que y varie à cause du changement que subit spontanément x, ou à cause de celui que subit une autre variable z, de laquelle x dépend, tout cela revient au même pour les limites qui sont indépendantes des valeurs des accroissemens; aussi lorsqu'on différentie une équation entre x et y, en faisant

sant varier dx aussi bien que dy, on peut transformer ensuite les résultats en coefficiens différentiels au moyen des formules du n° 116, comme on le ferait en différentiant suivant le procédé du n° 115 : de l'une ou de l'autre manière on parvient au même résultat. Les formules obtenues par la première sont en quelque sorte plus élégantes, parceque les deux variables y sont traitées symétriquement. On trouvera, sur ce sujet, dans le premier chapitre du *Traité de Calcul différentiel et du Calcul intégral*, des détails assez importans et qui n'avaient encore été donnés par personne que je sache avant la publication de cet ouvrage.

118. D'après ce qu'on vient de voir, on pourra toujours différentier le système de deux équations, contenant trois variables, système duquel il résulte que deux quelconques de ces variables sont des fonctions déterminées de la troisième. Si $U=0$ et $V=0$ désignent deux équations entre x, y et z, on en prendra les différentielles successives en faisant varier en même temps celles des deux indéterminées que l'on regarde comme fonctions de la troisième.

Si l'on avait trois équations $U=0$, $V=0$ et $W=0$, entre quatre variables t, x, y, z, trois de ces variables nécessairement déterminées par la quatrième, seraient des fonctions de celles-ci, et leurs différentielles devraient varier.

En général, un nombre m d'équations entre $m+1$ variables déterminant m de ces variables, au moyen de celle qui reste, ne doit être regardé que comme contenant des fonctions de cette variable ; il faut donc dans les différentiations successives de ces équations faire varier les différentielles des indéterminées qui représentent des fonctions de la variable que l'on considère comme indépendante, et dont on prend la différentielle pour constante.

119. Lorsqu'on a des équations de cette nature, on peut toujours en tirer un résultat unique, entre deux quelconques des variables, par un procédé que je vais exposer sur deux équations à trois variables, et qu'il sera facile d'étendre ensuite autant qu'on le voudra.

Soient $U=0$, $V=0$, ces équations, l'une de l'ordre m et l'autre de l'ordre n, entre les variables x, y, t et leurs différentielles, et dont on veuille éliminer t; la première pourra contenir outre la variable t, les différentielles dt, $d^2t, \ldots d^m t$, et la seconde dt, $d^2t, \ldots d^n t$. Comme on n'a point les équations primitives, ni toutes les différentielles des ordres inférieurs à ceux des proposées, il faut nécessairement se procurer de nouvelles équations pour chasser les quantités inconnues dt, d^2t, etc., et c'est ce qu'on fera en différentiant n fois l'équation $U=0$, et m fois l'équation $V=0$. On obtiendra par ce moyen $n+m$ équations nouvelles; et on en aura en tout un nombre $m+n+2$, en comptant les deux proposées: les inconnues à éliminer, savoir, t, dt, $d^2t, \ldots d^m t, \ldots d^{m+n}t$, étant au nombre de $m+n+1$, il restera donc une équation finale, en x, y et leurs différentielles.

Si dt était constant, il semblerait qu'en différentiant une seule fois l'une des équations proposées, on pourrait éliminer t et dt, puisqu'on aurait alors trois équations; mais on doit observer que les différentielles d^2x, d^2y, contiennent implicitement t, puisqu'alors on a regardé x et y comme des fonctions de cette variable (118); il faut donc prendre pour constante la différentielle de l'une des variables que l'on veut conserver.

De la différentiation des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

120. Lorsque l'on n'a qu'une seule équation entre trois variables, il faut d'abord fixer arbitrairement les

valeurs de deux quelconques de ces variables pour déterminer la troisième, qui par conséquent est une fonction des deux premières. Si l'on a, par exemple, l'équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

on ne pourra obtenir z, sans avoir préalablement assigné des valeurs à x et à y; mais il convient d'observer que les quantités x et y n'étant liées entr'elles par aucune relation, la seconde peut demeurer la même, quoique la première ait changé, et réciproquement.

Il résulte de là que la valeur de z peut varier de plusieurs manières, 1°. en conséquence d'un changement arrivé à x ou à y seul; 2°. par le concours de ces deux circonstances. Dans le premier cas, la quantité y, ou la quantité x, étant regardée comme constante, l'équation proposée revient au fond à une équation à deux variables; ainsi lorsque x change seul, on a

$$x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}z=o, \quad \text{ou} \quad x+z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=o,$$

et lorsque c'est y, il vient

$$y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=o, \quad \text{ou} \quad y+z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=o.$$

L'on a donc successivement

$$\mathrm{d}z=-\frac{x\mathrm{d}x}{z}, \qquad \mathrm{d}z=-\frac{y\mathrm{d}y}{z};$$

mais il faut observer que la première de ces différentielles est relative à la variabilité particulière de x, et la seconde à celle de y; c'est ce qu'on exprime en disant que l'une est la *différentielle partielle* relative à x, et l'autre la *différentielle partielle* relative à y.

Le sens de la question suffit pour empêcher qu'on ne les confonde, et on les distingue d'ailleurs suffisamment en faisant attention à la différentielle de la variable indépendante qui les affecte.

Les coefficiens différentiels analogues sont

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}.$$

En général lorsqu'il s'agit d'une fonction de plusieurs variables, on doit bien se rappeler que dans $\frac{dz}{dx}$, dz est la différentielle partielle de z relativement à x, tandis que dans $\frac{dz}{dy}$, dz est la différentielle partielle relative à y.

121. Si $f(x, y)$ représente une fonction quelconque de x et de y; en supposant d'abord que la variable x change seule et devienne $x+h$, il faudra regarder y comme une constante, et traiter la fonction proposée de même qu'une fonction de x; on aura donc par le théorême du n° 21, en faisant pour abréger $f(x, y)=u$,

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Pour trouver ce que devient la fonction proposée lorsque y seul prend un accroissement k, on regarderait x comme une constante, et $f(x,y)$, ou u, comme une fonction de y; par-là on aurait

$$f(x,y+k)=u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Dans le cas où les quantités x et y varient en même temps et deviennent $x+h$ et $y+k$, comme on n'a assigné aucune forme particulière à la fonction $f(x, y)$, il n'est pas possible d'y faire à la fois les deux substitutions indiquées; mais il est aisé de sentir qu'on parviendra au même résultat en changeant d'abord x en $x+h$, et mettant ensuite $y+k$ pour y, dans le développement qu'on aura obtenu par la première opération.

On a déjà

$$\mathrm{f}(x+h,y)=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

u représentant $\mathrm{f}(x,y)$. Pour développer les coefficiens des différens termes de cette série, en ayant égard au changement arrivé à y, j'observerai d'abord que dans chacun d'eux, x doit être regardé comme une quantité constante, et qu'on doit les traiter parconséquent comme des fonctions de la seule variable y. D'après cela, $\mathrm{f}(x,y)$, ou u, deviendra

$$u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{k}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si dans ce développement on écrit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, au lieu de u, on aura pour résultat ce que devient la fonction $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, lorsque y se change en $y+k$; c'est-à-dire,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y}\frac{k}{1}+\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Mais comme, en partant de la fonction u, l'expression $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y}$ indique deux différentiations faites successivement, la première en ayant égard à la variabilité de x seul, et la seconde en ne considérant que celle de y; on donne à cette expression une forme plus simple en l'écrivant ainsi qu'il suit : $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$. On représente de même $\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y^2}$ par $\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^2\mathrm{d}x}$; et en général, il faut entendre par $\frac{\mathrm{d}^{n+m}u}{\mathrm{d}y^n\mathrm{d}x^m}$, le coefficient différentiel de l'or-

ordre inverse, et commencer par la substitution relative à y; alors $f(x, y)$ serait devenue

$$f(x,y+k),$$

ou

$$u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

La substitution de $x+h$, au lieu de x, dans cette série, aurait changé u en

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et ensuite

$$\frac{du}{dy}\text{ en }\frac{du}{dy}+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^4u}{dx^3dy}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}\text{ en }\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}+\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^5u}{dx^3dy^2}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\frac{d^3u}{dy^3}\text{ en }\frac{d^3u}{dy^3}+\frac{d^4u}{dxdy^3}\frac{h}{1}+\frac{d^5u}{dx^2dy^3}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^6u}{dx^3dy^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

on aurait eu parconséquent

$$\left.\begin{aligned}f(x+h,y+k)=u&+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\&+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1}+\text{etc.}\\&+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2}+\text{etc.}\\&+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\&+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

Il est évident que ce second développement doit être identique avec le premier; car il est indifférent de changer d'abord x en $x+h$ et ensuite y en $y+k$, ou de faire les mêmes substitutions dans un ordre inverse,

puisque d'une manière ou de l'autre on obtient également $f(x+h, y+k)$.

Si on compare dans ces deux développemens les termes qui sont affectés des mêmes puissances de h et de k, on trouvera cette suite d'équations,

$$\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy}$$
$$\frac{d^3u}{dydx^2} = \frac{d^3u}{dx^2dy}$$
$$\frac{d^3u}{dy^2dx} = \frac{d^3u}{dxdy^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m} = \frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$$
etc. etc.

Il résulte de la première que *le coefficient différentiel du second ordre d'une fonction de deux variables, pris en différentiant par rapport à l'une d'elles et ensuite par rapport à l'autre, reste le même, quel que soit l'ordre qu'on ait suivi dans les différentiations.*

Soit, par exemple, $u = x^m y^n$; si on différentie d'abord en regardant x comme seule variable, on a $\frac{du}{dx} = mx^{m-1}y^n$; pifférentiant ensuite ce résultat, en ne faisant varier que y, on obtient $\frac{d^2u}{dydx} = mnx^{m-1}y^{n-1}$: en opérant dans un ordre inverse, on trouve

$$\frac{du}{dy} = nx^m y^{n-1} \text{ et } \frac{d^2u}{dxdy} = mnx^{m-1}y^{n-1};$$

et on voit que le dernier résultat est le même dans les

deux cas. Les autres équations rapportées ci-dessus ne sont que des conséquences de la première.

123. En retranchant $f(x,y)$ ou u de $f(x+h,y+k)$, on trouve

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)-f(x,y)=\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\\ +\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{kh}{11}+\text{etc.}\\ +\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\text{etc.}\\ +\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

Si on étend aux fonctions de deux variables la définition que j'ai donnée (5) de la différentielle d'une fonction, on verra que celle de $f(x,y)$, ou de u, est comprise dans les deux termes qui forment la première colonne du développement précédent; et en changeant h en dx et k en dy, on aura

$$df(x,y)=du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy.$$

Il suit de là que la *différentielle totale* d'une fonction de deux variables renferme deux parties, savoir : $\frac{du}{dx}dx$, ou la différentielle prise en regardant x comme seule variable, et $\frac{du}{dy}dy$, ou la différentielle prise en regardant y comme seule variable.

On peut donc appliquer aux fonctions de deux variables, les règles données (nº 10 et suiv.) pour la différentiation de celles qui dépendent d'une seule, et pour cela *on différentiera la fonction proposée d'abord par*

port à l'une des variables, et ensuite par rapport à l'autre : la somme des deux résultats sera la différentielle totale cherchée.

124. Je ne crois pas qu'il soit nécessaire de donner beaucoup d'exemples relatifs à la différentiation des fonctions de deux variables, puisqu'elle rentre dans celle des fonctions qui n'en contiennent qu'une; je me bornerai donc aux suivans :

On voit sur-le-champ, d'après la règle ci-dessus, que

$$d(x+y) = dx + dy$$
$$d \,.\, xy = ydx + xdy$$
$$d \,.\, \frac{x}{y} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Soit encore 1°. $u = x^m y^n$; on a

$$\frac{du}{dx}dx = mx^{m-1}y^n dx$$
$$\frac{du}{dy}dy = nx^m y^{n-1}dy;$$

donc

$$du = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1}dy = x^{m-1}y^{n-1}(mydx + nxdy):$$

2°. $u = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} = ay(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$; on a

$$\frac{du}{dx}dx = -\frac{ayxdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{du}{dy}dy = \frac{ady}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donc

$$du = -\frac{ayxdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ady}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou en réduisant

$$=\frac{-axydx + ax^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}:$$

3°. $u=\text{Arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)$; expression qui est celle d'un arc de cercle dont le rayon est 1, et la tangente $\frac{x}{y}$; pour la différentier on fera $\frac{x}{y}=z$, et on cherchera, d'après le n° 35, la différentielle de l'arc dont la tangente est exprimée par z; il viendra pour résultat $\frac{dz}{1+z^2}$: on aura donc $du=\frac{dz}{1+z^2}$; et mettant au lieu de z et de dz leur valeur, on trouvera

$$du=\frac{\frac{ydx-xdy}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{ydx-xdy}{y^2+x^2}.$$

125. La manière dont on écrit les différentielles des fonctions qui dépendent de plusieurs variables donne lieu à des remarques importantes. On a déjà vu (120) qu'il ne faut pas confondre alors $\frac{du}{dx}dx$ avec du, comme on pourrait le faire si u ne renfermait que la seule variable x, parce que l'expression $\frac{du}{dx}$ a dans ce cas un sens particulier; elle désigne le coefficient différentiel pris dans l'hypothèse de x seul variable; ou le quotient du premier terme du développement de la diffé-

rence prise dans cette hypothèse, divisé par l'accroissement dx : il en est de même de $\frac{du}{dy}$.

Les quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ sont appelées ordinairement *différences partielles* du premier ordre de la fonction u; et en général $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ représente une de celles de l'ordre $m+n$, prise en différentiant m fois par rapport à x, et n fois par rapport à y.

Je crois devoir observer que la dénomination de *différence partielle* n'est pas exacte ; car les formules qu'on désigne ainsi n'expriment point la différence entre deux quantités. Les vraies *différences partielles* de u sont

$$\mathrm{f}(x+h,y)-\mathrm{f}(x,y),$$
$$\mathrm{f}(x,y+k)-\mathrm{f}(x,y),$$

la première étant prise en n'ayant égard qu'au changement de x, et la seconde en ne supposant que celui de y. Les expressions

$$\frac{du}{dx}h,\quad \frac{du}{dy}k,\ \text{ou}\ \frac{du}{dx}dx,\quad \frac{du}{dy}dy,$$

qui sont les premiers termes des développemens de ces différences, doivent être nommées *différentielles partielles*, et $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, resteront toujours les *coefficiens différentiels* du premier ordre de la fonction proposée; mais il faut remarquer qu'une fonction d'une seule variable n'a dans chaque ordre qu'un coefficient différentiel (17) tandis qu'une fonction de deux variables a deux coefficiens différentiels pour le premier ordre, trois pour le second, quatre pour le troisième, etc.

Voici comment on peut trouver ces divers coefficiens, en partant des deux premiers :

On a d'abord

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy;$$

prenant ensuite la différentielle des fonctions $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, qui doivent être traitées comme des fonctions de deux variables, il vient

$$d\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dydx}dy,$$

$$d\frac{du}{dy} = \frac{d^2u}{dxdy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy;$$

et parceque la différentielle seconde n'est autre chose que la différentielle de la différentielle première, on aura

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2,$$

en regardant dx et dy comme des constantes, et en observant que les coefficiens différentiels dont les dénominateurs ne présentent que les différens arrangemens d'un même produit en dx et dy, sont identiques (122).

Si on différentie les coefficiens différentiels qui se trouvent dans le résultat précédent, il viendra

$$d.\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^3u}{dx^3}dx + \frac{d^3u}{dydx^2}dy,$$

$$d.\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^3u}{dx^2dy}dx + \frac{d^3u}{dydxdy}dy;$$

$$d.\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^3u}{dxdy^2}dx + \frac{d^3u}{dy^3}dy,$$

et parconséquent

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{3d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{3d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3.$$

On continuera facilement cette formation, et on remarquera sans doute l'analogie de ces résultats avec les puissances du binome.

Il faut remarquer que, d'après la notation précédente, la série du n° 123 rentre dans celle du n° 22, lorsqu'on substitue dx à h, et dy à k; ensorte que si on désigne $f(x+dx, y+dy)$ par u', on a encore

$$u' - u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \text{etc.},$$

formule tout aussi générale que celle du n° 123, puisque les accroissemens dx et dy sont également arbitraires.

126. Il est aisé d'étendre ces considérations aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, et de s'assurer que si l'on a

$$u = f(t, x, y, z),$$

il en résultera

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

en désignant par

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz},$$

les coefficiens différentiels de la fonction u, pris en y faisant varier seulement t, ou x, ou y, ou z.

Cette notation, due à Fontaine, est la plus simple et la plus expressive de toutes celles qu'on a proposées pour remplir les mêmes indications. Euler, dans la crainte que l'on ne confonde, par exemple, le coefficient différentiel $\frac{du}{dx}$ avec le rapport de la différentielle totale du à la différentielle dx, rapport qui est équivalent à

$$\frac{\frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz}{dx},$$

désigne ce rapport par $\frac{du}{dx}$, tandis qu'il exprime le coefficient différentiel par $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Le sens du discours rend presque toujours cette distinction superflue; Fontaine d'ailleurs avait pourvu au cas où elle était absolument nécessaire, en proposant d'écrire le rapport ainsi : $\frac{1}{dx}du$; et sentant que ce rapport est employé beaucoup plus rarement que le coefficient différentiel, il avait affecté à ce dernier le signe le plus simple, ce qui est conforme à la théorie de toutes les nomenclatures, et précisément contraire à ce qu'a fait Euler.

Considérant que l'on n'emploie jamais le rapport des différentielles des deux quantités sans supposer, au moins implicitement, que l'une est fonction de l'autre, et que l'expression

$$\frac{\frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{dx}du,$$

n'a de sens qu'autant qu'on regarde les variables t, y et z comme dépendantes implicitement de x, j'ai proposé d'écrire cette expression ainsi :

$$\frac{d(u)}{dx},$$

renfermant la fonction entre deux parenthèses, pour montrer qu'on y faisait varier non-seulement les termes affectés explicitement de x, mais aussi toutes les quantités qui pourraient dépendre implicitement de celle-ci. Cette notation a, comme celle de Fontaine, l'avantage de consacrer le signe le plus simple au cas le plus fréquent.

127. Soit $u=0$ une équation renfermant x, y et z; si on regarde x et y comme les deux variables indépendantes, z sera une fonction de l'une et de l'autre, et lorsque x recevra un accroissement quelconque, y étant supposé constant, z éprouvera un changement subordonné à celui de x. Dans cette hypothèse, l'équation $u=0$ devra être envisagée comme une équation entre deux variables x et z; on aura donc (38)

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

et de là on tirera le coefficient différentiel de z relatif à la variabilité de x. Il faut se rappeler ici, d'après la distinction qui a été faite n° 120, que dans $\frac{dz}{dx}$, dz n'est que la différentielle partielle de z, prise par rapport au changement de x seul.

Il est évident que si on eût fait varier y on aurait eu, en différentiant l'équation proposée comme ne contenant

tenant que les variables y et z,

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

Si on multiplie par dx la première des équations trouvées ci-dessus, et la seconde par dy, et qu'on les ajoute ensuite, il viendra

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right)=0\,;$$

mais $\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, n'est autre chose que la différentielle totale de z (123) : on aura donc

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=0,$$

c'est-à-dire, qu'on pourra égaler à zéro la différentielle première de l'équation $u=0$, prise par rapport aux trois variables x, y et z. Il ne faut pas perdre de vue que cette différentielle doit être regardée comme équivalente à deux équations, car en y substituant pour dz sa valeur $\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, il faudra, à cause de l'indépendance des accroissemens dx et dy, que les quantités qui multiplient chacun d'eux soient séparément égales à zéro.

128. On parviendra aux équations qui donnent les coefficiens des ordres supérieurs, en différentiant les équations

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

Je représenterai la première par $\frac{d(u)}{dx} = 0$, et la seconde par $\frac{d(u)}{dy} = 0$, conformément à la notation adoptée n° 126; ces équations renfermeront encore les trois variables x, y et z, et pourront être traitées comme la proposée. En n'ayant d'abord égard qu'au changement de x, non-seulement z variera, mais en même temps le coefficient du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ donnera naissance au coefficient du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$. En différentiant donc $\frac{d(u)}{dx}$ par rapport à x, on aura, comme pour les équations à deux variables,

$$\frac{d^2(u)}{dx^2}; \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

Si on différentie $\frac{d(u)}{dx}$, par rapport à y et à z, ou $\frac{d(u)}{dy}$, par rapport à x et à z, en observant que dans le premier cas, $\frac{dz}{dx}$ donne $\frac{d^2z}{dydx}$, et dans le second $\frac{dz}{dy}$ donne $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$, on aura un résultat unique, qui sera $\frac{d^2(u)}{dxdy}$, ou

$$\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dzdy}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dzdx}\frac{dz}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Enfin l'équation $\frac{d(u)}{dy} = 0$, différentiée, en regardant y

et z comme seules variables, produira

$$\frac{d^2(u)}{dy^2}, \text{ ou } \frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dydz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dy^2} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

Mais puisque z est une fonction de x et de y, on doit regarder u comme une fonction de ces variables, par-conséquent on aura (125)

$$d^2(u) = \frac{d^2(u)}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2(u)}{dxdy}dxdy + \frac{d^2(u)}{dy^2}dy^2 = 0;$$

et en effet, si on substitue à

$$\frac{d^2(u)}{dx^2}, \quad \frac{d^2(u)}{dxdy}, \quad \frac{d^2(u)}{dy^2},$$

les résultats trouvés ci-dessus, et qu'on remplace

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

par la différentielle première totale dz, et

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2$$

par la différentielle seconde totale d^2z, on aura la même équation finale que celle qu'on aurait obtenue, si on avait différentié

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

en regardant dx et dy comme constans, et z comme une fonction de x et de y.

129. On étendra sans peine ces considérations à tel ordre de différentiation, ou à tel nombre de variables

qu'on voudra; car tout se réduit à déterminer celles qui sont indépendantes, ce qu'on ne peut faire que par la nature de la question qui a conduit à l'équation ou aux équations proposées; et ensuite on différentiera, par rapport à chacune de ces variables en particulier, en traitant les variables subordonnées comme étant implicitement des fonctions des variables indépendantes.

Si, par exemple, on avait les deux équations

$$u=0, \qquad v=0,$$

entre les cinq variables s, t, x, y et z, on verrait que trois de ces variables sont indépendantes. Supposant donc que y et z soient les deux variables subordonnées, ou des fonctions de s, t, x, données par les équations proposées, on différentiera successivement u et v par rapport à s, par rapport à t, par rapport à x; et on aura

$$\frac{du}{ds}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{ds}=0,$$
$$\frac{du}{dt}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}=0,$$
$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}=0.$$

Si on multiplie respectivement ces équations par ds, dt, dx, qu'on les ajoute et qu'on mette dy au lieu de

$$\frac{dy}{ds}ds+\frac{dy}{dt}dt+\frac{dy}{dx}dx,$$

dz au lieu de

$$\frac{dz}{ds}ds+\frac{dz}{dt}dt+\frac{dz}{dx}dx,$$

il viendra

$$\frac{du}{ds}ds+\frac{du}{dt}dt+\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz=du=0.$$

On tirera un résultat semblable de l'équation $v=0$ et il s'ensuit, qu'en différentiant les équations $u=0$ et $v=0$, par rapport à toutes les variables s, t, u, x, y et z, et en y substituant au lieu de dy et de dz, les expressions de ces différentielles, considérées comme appartenant à des fonctions de trois variables (126), il faudra égaler séparément à zéro le coefficient de la différentielle de chaque variable indépendante.

En regardant les coefficiens différentiels eux-mêmes comme de nouvelles fonctions des variables indépendantes, on ne saurait être arrêté dans la recherche des différentielles ultérieures; ainsi après quelques remarques sur l'élimination des constantes et des fonctions, je terminerai ce qui regarde la formation des équations différentielles.

130. L'équation $u=0$, entre x, y et z, ayant deux différentielles premières $\frac{d(u)}{dx}=0$ et $\frac{d(u)}{dy}=0$, il est évident qu'on peut éliminer deux constantes entre ces trois équations, et le résultat exprimera la relation des variables x, y, z et des coefficiens $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, indépendamment des quantités éliminées.

Si on joint aux équations précédentes les trois du second ordre,

$$\frac{d^2(u)}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2(u)}{dxdy}=0,\quad \frac{d^2(u)}{dy^2}=0,$$

on aura six équations, entre lesquelles on pourra éliminer cinq quantités, et ainsi de suite.

131. Ceci conduit à une remarque importante, c'est qu'on peut éliminer d'une équation à trois ou à un plus grand nombre de variables, des fonctions dont la forme est absolument inconnue. Soit pour exemple l'équation $z = f(ax + by)$, dans laquelle la caractéristique f désigne une fonction dont la forme n'est déterminée en aucune manière : je vais en déduire une équation entre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, indépendante de cette fonction et qui conviendra également à $z = ax + by$, à $z = \sqrt{ax + by}$, à $z = \sin(ax + by)$ et en général à toutes les fonctions de la quantité $ax + by$, de quelque forme qu'elles soient. Je fais pour cela $ax + by = t$; l'équation proposée devient $z = f(t)$, et parconséquent on aura $dz = f'(t)\,dt$, en représentant $\frac{df(t)}{dt}$ par $f'(t)$; mais

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

$$dt = \frac{dt}{dx}dx + \frac{dt}{dy}dy,$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = f'(t)\frac{dt}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = f'(t)\frac{dt}{dy}.$$

Mettant donc pour $\frac{dt}{dx}$ et $\frac{dt}{dy}$ leurs valeurs a et b, puis éliminant $f'(t)$, il viendra

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0.$$

Cette équation exprime un caractère au moyen duquel on pourra reconnaître si une quantité proposée est une fonction de $ax+by$ ou non ; car d'après sa formation, elle doit être satisfaite ou devenir identique, toutes les fois qu'on y substituera au lieu de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ les valeurs qui résulteraient de la différentiation d'une fonction de $ax+by$. Je suppose qu'on ignorât l'origine du polynome $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$: en l'égalant à z, et en différentiant on trouvera

$$\frac{dz}{dx}=2a^2x+2aby,\quad \frac{dz}{dy}=2abx+2b^2y;$$

ces valeurs mises dans l'équation $b\frac{dz}{dx}-a\frac{dz}{dy}=0$, la rendent identique : on en conclura donc que le polynome représenté par z, est une fonction de $ax+by$, ce qui est d'ailleurs évident, puisque

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2=(ax+by)^2.$$

On voit en général que $u=0$ étant une équation entre x, y, z, et une fonction quelconque indéterminée représentée par $f(t)$, et dans laquelle on ne connaît que la composition de t en x, y et z, on pourra toujours éliminer $f(t)$ et $f'(t)$ à l'aide des équations

$$u=0,\quad \frac{d(u)}{dx}=0,\quad \frac{d(u)}{dy}=0.$$

En passant au second ordre, le nombre d'équations devenant plus grand, il est possible, dans beaucoup de cas, d'éliminer deux fonctions indéterminées ; mais je n'entrerai point dans ces détails, non plus que dans ce qui regarde les équations qui renferment plus de trois variables.

132. Je dirai ici très-peu de chose sur la manière de réduire en séries les fonctions de deux variables, parcequ'il arrive le plus souvent qu'on ne les développe que par rapport à l'une des variables qu'elles contiennent, en supposant à l'autre une valeur constante, et qu'alors elles doivent etre traitées de même que les fonctions d'une seule variable. Il sera peut-etre utile néanmoins de faire voir que la formule du n° 121, s'emploie à développer les fonctions de deux variables, comme celle du n° 21 s'applique aux fonctions qui n'en renferment qu'une.

Si on fait $x=0$ et $y=0$ dans la formule du n° 121, c'est-à-dire, dans u et dans chacun de ses coefficiens différentiels, elle donnera le développement de $f(h,k)$ ordonné suivant les puissances des quantités h et k; mais on pourra écrire x au lieu de h, et y au lieu de k, et il en résultera

$$f(x,y)=u+\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y\right\}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}x^2+2\frac{d^2u}{dxdy}xy+\frac{d^2u}{dy^2}y^2\right\}$$
$$+\text{ etc.}$$

en observant de faire x et y nuls, tant dans u que dans les expressions qu'on obtiendra pour chacun des coefficiens différentiels.

On pourrait encore arriver au développement de $f(x,y)$ par la différentiation, ainsi qu'on est parvenu à celui de $f(x)$ dans le n° 19; car si on suppose

$$u=A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+\text{ etc.}$$

les lettres A, B, C, etc. désignant des quantités indépendantes de x et de y, et qu'on différentie cette équa-

tion par rapport à x et par rapport à y, plusieurs fois de suite, de manière à former les expressions des coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{du^2}{dx^2},\quad \frac{d^2u}{dxdy},\ \text{etc.}$$

on aura, en égalant à zéro x et y, après les différentiations,

$$\frac{du}{dx}=B,\qquad \frac{du}{dy}=C,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=1.2D,\quad \frac{d^2u}{dxdy}=1.1.E,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=1.2F,\ \text{etc.}$$

à l'égard de A, on trouvera sa valeur en cherchant celle de la fonction u, lorsque x et y sont nuls.

Recherche des minima *et des* maxima *des fonctions de deux variables.*

133. Si dans une fonction de deux variables, on en regarde une comme constante, et qu'on donne à l'autre une infinité de valeurs, à chacune de ces valeurs il correspondra une ou plusieurs valeurs de la fonction proposée, parmi lesquelles il pourra s'en trouver qui soient des *maxima* ou des *minima*, et qu'on déterminera en égalant à zéro le coefficient différentiel relatif à la variable à laquelle on a attribué les changemens de la fonction (48).

Ainsi u étant une fonction de x et de y, si on suppose y constant et qu'on fasse $\frac{du}{dx}=0$, on obtiendra les valeurs de x qui donnent les plus grandes et les plus

petites valeurs de u, parmi toutes celles qui répondent à une même valeur de y.

Le résultat qu'on obtient de cette manière est encore indéterminé, puisqu'il peut varier à raison des changemens qu'on fera subir à la seconde variable y, et n'offre parconséquent que des *maxima* ou des *minima* relatifs, parmi lesquels il en existe nécessairement un nombre limité qui surpassent ou qui sont moindres que tous les autres, et qui répondent à des valeurs déterminées de y. Ces derniers qui sont entièrement déterminés sont des *maxima* ou des *minima absolus* de la fonction proposée; on les découvrirait aisément en chassant x de la fonction u, au moyen de l'équation $\frac{du}{dx} = 0$, ce qui rendrait u fonction de y seul; et en désignant le résultat par v, il suffirait alors de faire $\frac{dv}{dx} = 0$, pour déterminer y convenablement à l'état de la question (48).

On peut parvenir à une équation équivalente à $\frac{dv}{dy} = 0$, sans qu'il soit besoin d'éliminer x; pour cela il faut observer que l'équation $\frac{du}{dx} = 0$, fournie par la condition du *maximum* ou du *minimum* relatif à x, établit une relation entre les variables x et y, ensorte qu'on doit regarder la première comme une fonction de la seconde. En différentiant dans cette hypothèse, on aura (126)

$$\frac{d(u)}{dy} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dy} + \frac{du}{dy} = 0,$$

résultat qui se réduit à $\frac{du}{dy} = 0$, puisque par la condition relative à x, on a déjà $\frac{du}{dx} = 0$.

On détermine donc les valeurs de x et de y qui donnent les *maxima* et les *minima* absolus de la fonction u, au moyen des équations

$$\frac{du}{dx} = 0, \qquad \frac{du}{dy} = 0.$$

En étendant ces considérations aux fonctions de tant de variables qu'on voudra, on trouvera que *pour obtenir les* maxima *et les* minima *absolus de ces fonctions, il faut en égaler séparément à zéro les coefficiens différentiels du premier ordre, pris par rapport à chacune des variables dont elles dépendent.*

134. Les caractères distinctifs des *maxima* et des *minima* dans les fonctions de plusieurs variables se tirent de principes analogues à ceux qu'on a employés à l'égard des fonctions d'une seule variable (49), mais l'application est plus compliquée ; c'est pourquoi je me bornerai à ce qui regarde les fonctions de deux variables.

Soit u une fonction de x et de y ; pour abréger, je désignerai par

$$A, \; B, \; C, \; D, \; E, \; F, \text{ etc.}$$

la suite des fonctions

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2};$$

le résultat de la substitution de $x+h$, $y+k$, dans u, sera (121)

$$\begin{aligned} & A + Bh + Ck \\ & + \frac{1}{1.2}\{Dh^2 + 2Ehk + Fk^2\} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

expression dont la valeur doit être moindre que A, lors du *maximum* absolu, et plus grande lors du *minimum* absolu, quels que soient les signes des lettres h, k, pourvu qu'elles n'expriment que de petits changemens. Mais comme les termes du premier ordre Bh, Ck, qu'on peut rendre plus considérables que tous les autres, en prenant h et k d'une petitesse convenable, changent de signe en même temps que ces quantités, un raisonnement semblable à celui du n° 48, fera voir qu'ils doivent être nuls dans le cas du *maximum* ou du *minimum;* on aura donc d'abord.

$$B=\frac{du}{dx}=0, \quad C=\frac{du}{dy}=0, \text{ etc.}$$

comme il résulte de la règle énoncée dans le n° précédent.

Ces conditions étant remplies par les valeurs de x et de y, déterminées en conséquence, il faudra ensuite que les coefficiens D, E et F, ne s'évanouissent pas en même temps, et de plus, que le signe de la quantité du second ordre, qui forme la deuxième ligne du développement ci-dessus, soit indépendant des rapports qu'on pourrait établir entre h et k et de leurs signes.

On sait, par la théorie des équations algébriques, que toute expression de la forme de leur premier membre, lorsque le second est zéro, ne peut passer du positif au négatif, sans devenir nulle dans l'intervalle; et que quand elles n'ont que des racines imaginaires, elles ne changent point de signe, quelque valeur qu'on donne à l'inconnue. Il suit de là que si la quantité

$$Dh^2 + 2Ehk + Fk^2,$$

égalée à zéro et résolue, comme une équation, par

rapport à l'une des indéterminées h ou k, ne donne que des racines imaginaires, on en pourra conclure qu'elle conservera le même signe, quelles que soient ces indéterminées. Prenant la valeur de h, par exemple, on trouve

$$h = \frac{k(-E \pm \sqrt{-FD + E^2})}{D},$$

résultat qui sera imaginaire, si la quantité comprise sous le radical est négative, c'est-à-dire, si l'on a $FD > E^2$. Il faut bien remarquer que cette condition, nécessaire pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum*, suppose que les quantités F, D sont toujours de même signe. Alors la quantité $Dh^2 + 2Ehk + Fk^2$ ne pourra changer de signe; et comme elle se réduit à Dh^2, lorsque $k = 0$, il faudra pour qu'elle soit positive, ou qu'il y ait *minimum*, que D soit positif: il y aura *maximum* dans le cas contraire.

135. Pour se convaincre *à posteriori*, que lorsque les conditions qu'on vient de trouver seront remplies, l'ensemble des termes du second ordre de la série $A + Bh + Ck +$ etc. restera toujours de même signe, quels que soient h et k, il suffira de remarquer que le premier membre de l'équation du second degré dont les racines sont

$$h = -\alpha \pm \sqrt{-\beta^2},$$

ayant la forme

$$(h + \alpha)^2 + \beta^2$$

est la somme de deux quarrés, et ne peut parconséquent changer de signe. En faisant

$$\alpha = \frac{Ek}{D}, \quad \beta^2 = \frac{(FD - E^2)k^2}{D^2},$$

l'expression de h conduit à

$$\left(h+\frac{Ek}{D}\right)^2+\frac{(FD-E^2)k^2}{D^2}=h^2+\frac{2E}{D}hk+\frac{F}{D}k^2$$
$$=\frac{1}{D}(Dh^2+2Ehk+Fk^2),$$

et l'on voit bien maintenant que la quantité

$$Dh^2+2Ehk+Fk^2$$

ne peut changer de signe tant que $FD-E^2$ sera une quantité positive, puisque le quarré de $h+\frac{Ek}{D}$ est essentiellement positif, quels que soient les signes de h et de k.

Euler, dans son Calcul différentiel, n'indiqua que la nécessité d'avoir D et F positifs ou négatifs en même temps; Lagrange montra le premier que cette condition n'était pas suffisante, et on lui doit la théorie que je viens d'exposer.

Si les coefficiens du second ordre s'anéantissaient en même temps que ceux du premier, il n'y aurait *maximum* ou *minimum* qu'autant que les coefficiens du troisième disparaîtraient aussi, et que les termes du quatrième ordre formeraient une quantité dont le signe ne dépendrait aucunement de h et de k. La considération des facteurs imaginaires que devrait avoir cette quantité pour satisfaire à la condition demandée, mènerait à des résultats analogues aux précédens. Au reste, j'observerai que, quoi qu'il arrive après la substitution des valeurs de x et de y, relatives au *maximum* ou au *minimum*, dans u et dans ses coefficiens différentiels, il faut toujours que les résultats obtenus par la

supposition de $x \pm h$, $y \pm k$, soient tous moindres ou tous plus grands que u, et que les diverses méthodes propres à faire reconnaître si cela a lieu, le seront aussi pour s'assurer de l'existence du *maximum* ou du *minimum*.

136. Pour donner un exemple, j'ai choisi la question suivante, analogue à celle du n° 50 : *partager la quantité* a *en trois parties*, x, y, a—x—y, *telles que le produit* $x^m y^n (a-x-y)^p$ *soit un* maximum.

On a alors

$$u = x^m y^n (a-x-y)^p$$

$$\frac{du}{dx} = x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} \{ma - mx - my - px\} = 0$$

$$\frac{du}{dy} = x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} \{na - nx - ny - py\} = 0;$$

les facteurs $ma-mx-my-px$ et $na-nx-ny-py$, étant égales à zéro, donnent

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \; y = \frac{na}{m+n+p}, \; a-x-y = \frac{pa}{m+n+p}.$$

Pour savoir si ces valeurs appartiennent en effet à un *maximum*, on les substituera dans les expressions générales de

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2};$$

en faisant pour abréger, $m+n+p=q$, on trouvera

$$D = -(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1} \left(\frac{na}{q}\right)^n \left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}$$

$$E = - \frac{mna}{q} \left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1} \left(\frac{na}{q}\right)^{n-1} \left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}$$

$$F = -(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^m \left(\frac{na}{q}\right)^{n-1} \left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1};$$

Les quantités D et F sont négatives, et on s'assurera sans peine qu'elles remplissent la condition $DF-E^2>0$, lorsque les exposans m, n, p, sont positifs, ainsi on aura obtenu le *maximum* demandé.

Notions générales sur l'application du Calcul différentiel à la Théorie des courbes à double courbure et des surfaces courbes.

137. J'ai donné beaucoup de détails sur cette Théorie, dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral;* on y trouve un extrait fort étendu des recherches de Monge, réunies et liées avec celles qu'Euler et plusieurs autres géomètres ont faites sur le même sujet. Ici je me bornerai aux problémes les plus simples sur cette matière.

On sait (*Trig. appendice*) que deux équations primitives entre trois variables, se représentent par une courbe à double courbure, tandis qu'une seule équation entre trois variables appartient à une surface. Lorsqu'on veut appliquer le Calcul différentiel aux courbes à double courbure, on peut les considérer comme les limites de polygones dont trois côtés consécutifs ne sauraient être dans le même plan. Le prolongement de l'un de ces côtés donne la tangente de même que dans les courbes planes

FIG. 33. On aura facilement les équations de la tangente MT, *fig.* 33, en observant que ses projections sont elles-mêmes tangentes à celles de la courbe XM; et comme il suffit de connaître deux projections de cette droite, je choisirai celle qui se trouve sur le plan des x et z, et celle que contient le plan des y et z. En désignant

désignant donc par x', y' et z', les coordonnées d'un point quelconque de la tangente, celles du point M étant toujours x, y et z, l'équation de la droite $T''M''$, tangente à la projection $X''M''$, sera

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) \quad (67),$$

et celle de $T'''M'''$, tangente à $X'''M'''$, sera

$$z' - z = \frac{dz}{dy}(y' - y).$$

Supposons que des équations des courbes $X''M''$ et $X'''M'''$ on ait tiré les valeurs de y et de z en x, et qu'après la substitution de ces valeurs dans les équations de la tangente on élimine x, on aura la relation qui doit exister entre les coordonnées x', y' et z' de la tangente TM, quelle que soit la position du point M, et parconséquent l'équation de la surface formée par toutes les tangentes de la courbe XM. On reconnaîtra par là si cette courbe est plane ou non ; car dans le premier cas la surface dont on vient de parler sera nécessairement un plan, et dans le second une surface courbe.

138. Deux tangentes consécutives TM et tm, déterminent le plan qui passe par deux côtés consécutifs, et qu'on nomme *plan osculateur*. On peut trouver son équation en le regardant comme passant par trois points conséeutifs de la courbe proposée : soit donc

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0 \text{ son équation } (\textit{Trig. append.});$$

il faudra qu'on ait d'abord $Ax + By + Cz + D = 0$, puisqu'il doit contenir le point dont les coordonnées sont x, y et z; et pour que les deux points suivans s'y trouvent aussi, il faudra de plus que la différentielle

première et la différentielle seconde de son équation, aient lieu en même temps que celles des équations de la courbe proposée.

On pourrait prendre une des différentielles dx, dy, ou dz pour constante (118); mais il sera plus symétrique de les traiter toutes comme variables en même temps, et il viendra

$$Adx + Bdy + Cdz = o, \quad Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = o,$$

d'où on tirera

$$\frac{A}{C} = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dxd^2y - dyd^2x}, \quad \frac{B}{C} = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{dxd^2y - dyd^2x}:$$

retranchant l'équation

$$Ax + By + Cz + D = o,$$

de

$$Ax' + By' + Cz' + D = o,$$

mettant ensuite pour $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ leurs valeurs, et faisant disparaître les dénominateurs, on trouvera le résultat suivant remarquable par sa forme,

$$(x' - x)(dyd^2z - dzd^2y) + (y' - y)(dzd^2x - dxd^2z)$$
$$+ (z' - z)(dxd^2y - dyd^2x) = o.$$

En y substituant pour deux quelconques des trois coordonnées x, y, z, leurs valeurs tirées des équations de la courbe proposée, on aura l'équation du plan osculateur, particularisée par la coordonnée restante.

139. La différentielle de l'arc d'une courbe considérée dans l'espace, a pour expression

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

cela se voit évidemment en prenant la distance des points M et m, dont les coordonnées respectives sont

$$x, y, z, x+dx, y+dy, \text{ et } z+dz.$$

140. Mener une normale à une courbe considérée dans l'espace est un problème indéterminé, car il existe un nombre infini de droites, qui passant par le point de contact, sont en même temps perpendiculaires à la tangente; l'ensemble de ces droites forme un plan perpendiculaire à cette tangente, et qui se nomme *plan normal*: son équation sera (*Trig. appendice*)

$$(x'-x)\frac{dx}{dz}+(y'-y)\frac{dy}{dz}+(z'-z)=0,$$

ou

$$(x'-x)dx+(y'-y)dy+(z'-z)dz=0.$$

141. Soient x, y et z les coordonnées d'un point M, *fig.* 34, situé sur une surface courbe quelconque; on pourra regarder l'ordonnée $M'M=z$ comme une fonction des deux abscisses $AP=x$ et $PM'=y$. Lorsque x variant seul, deviendra $x+h$, on aura pour le développement de l'ordonnée $m'm$, prise dans la section QMm faite par un plan parallèle à celui des x et z et passant par le point proposé, la serie FIG. 34.

$$z+\frac{dz}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si c'est y qui se change en $y+k$, et que x demeure constant, on obtiendra l'ordonnée $n'n$, prise dans la section PMn faite par un plan parallèle à celui des y et z et passant par le point proposé. Le développement de cette ordonnée sera

$$z+\frac{dz}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3z}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

En faisant varier x et y en même temps, on passera du point M à un point quelconque N, et cela de deux manières différentes, savoir, en substituant $y+k$ au lieu de y dans le premier développement ci-dessus, ou bien $x+h$ au lieu de x dans le second. Par l'une de ces opérations on passe de l'ordonnée $m'm$ à l'ordonnée $N'N$, dans la section pmN, et par l'autre on passe de $n'n$ à $N'N$, dans la section qnN. Il est évident que ces deux sections doivent se rencontrer au point N, sans quoi la surface proposée ne serait pas continue ; il faut donc que les résultats rapportés dans les nos 121 et 122 soient identiques : l'équation $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$, à laquelle tient cette circonstance, n'est donc que l'expression de la loi de continuité.

Lorsque dans la série

$$z+\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}k$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}h^2+2\frac{d^2z}{dxdy}hk+\frac{d^2z}{dy^2}k^2\right)$$
$$+\text{etc.}$$

qui représente le développement de la valeur de z, correspondante à $x+h$ et à $y+k$, on cessera de regarder les quantités h et k comme indépendantes l'une de l'autre, et qu'on établira un rapport entr'elles, on fixera la direction du plan mené perpendiculairement à celui des x et y, par les deux points M et N, car

$$\frac{k}{h}=\frac{N'm'}{M'm'}=\text{tang}\,N'M'm'.$$

Il suit des considérations précédentes, et de ce qui a été dit n° 127, que si $u = 0$ représente l'équation d'une surface courbe, les équations différentielles

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0 \text{ et } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

appartiendront respectivement aux deux sections QMm et PMn; la coordonnée y n'entrera dans la première que comme une constante arbitraire, qui détermine la position du plan coupant : il en sera de même de la coordonnée x dans la seconde. On ne doit pas confondre le dz de l'une de ces équations avec celui de l'autre : ces deux différentielles ne sont que partielles, ainsi qu'on l'a fait remarquer n° 120; car la différentielle totale, ou l'ensemble des termes du premier ordre, a pour expression

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = pdx + qdy,$$

en faisant pour abréger $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$. Lorsqu'on a seulement $dz = pdx$, le dz est la différentielle de l'ordonnée de la section parallèle au plan des x et z; semblablement $dz = qdy$ est celle de l'ordonnée de la section parallèle au plan des y et z.

Si on prend $dy = \alpha dx$, la différentielle complète $dz = dx(p + \alpha q)$, appartiendra à l'ordonnée de la section faite par le plan $M'MNN''$, perpendiculaire à celui des x et y, en supposant $N'm' = \alpha \times M'm'$. On trouvera des choses analogues, en prenant successivement pour ordonnées chacune des variables x et y, et en regardant les deux autres comme les abscisses.

142. On parvient à l'équation du plan tangent, en l'assujétissant à passer par les deux droites MT et Mt qui touchent respectivement les sections QMm et PMn, au point M (*Compl. des Élém. de Géom.*). Les fonctions $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ étant les coefficiens différentiels de l'ordonnée z, considérée successivement dans chacune de ces sections, et les droites MT et Mt étant de plus parallèles aux plans des x et z et des y et z, il est aisé de voir que les équations de MT seront

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x), \quad y'-y=0,$$

et que celles de Mt seront

$$z'-z=\frac{dz}{dy}(y'-y), \quad x'-x=0.$$

Maintenant si on représente l'équation du plan tangent par

$$z'-z=A(x'-x)+B(y'-y),$$

il est évident que cette équation doit s'accorder avec les précédentes, et pour cela il faut qu'en y faisant successivement $y'-y=0$ et $x'-x=0$, on trouve

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x) \text{ et } z'-z=\frac{dz}{dy}(y'-y);$$

mais elle donne par ces suppositions

$$z'-z=A(x'-x) \text{ et } z'-z=B(y'-y):$$

on en conclura donc,

$$A=\frac{dz}{dx}=p, \quad B=\frac{dz}{dy}=q,$$

et parconséquent

$$z'-z=p(x'-x)+q(y'-y).$$

On pourrait craindre que le plan tangent déterminé, comme on vient de le voir, ne touchât la surface proposée que sur les deux sections que l'on a considérées : mais en différentiant son équation par rapport à x' et à y' seuls, on aura $dz'=pdx'+qdy'$, ce qui prouve que lorsqu'on prendra $dx=dx'$ et $dy=dy'$, on aura $dz=dz'$, et que parconséquent les points de la surface proposée, qui environnent immédiatement le point M, coïncident tous avec ceux du plan tangent, tant qu'on n'a égard qu'aux quantités du premier ordre. Il suit de là qu'un plan quelconque, mené par le point M, coupe la surface proposée dans une courbe qui a deux points communs avec le plan tangent, ou, ce qui est la même chose, a pour tangente l'intersection de ce plan avec le plan coupant (67).

143. La normale à une surface, étant perpendiculaire au plan tangent, a pour équations (*Trig. append.*)

$$x'-x+p(z'-z)=0,$$
$$y'-y+q(z'-z)=0.$$

On parvient encore à ces équations, en observant que la normale est la plus courte ligne qu'on puisse mener d'un point quelconque à cette surface; car si x', y', z', désignent les coordonnées de ce point, la distance au point de la surface proposée dont les coordonnées sont x, y, z, aura pour expression

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},$$

et à cause de la dépendance de z, sera seulement fonction de x et de y, lorsqu'on regardera comme inconnu

N 4

le point où la normale doit rencontrer la surface proposée. En différentiant dans cette hypothèse (133) pour trouver le *minimum* de l'expression, on obtiendra

$$(x'-x)\,dx+(z'-z)\,dz=0$$
$$(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=0,$$

résultat qui devient semblable au précédent, lorsque l'on met successivement $p\,dx$ et $q\,dy$ pour dz.

144. Il convient de remarquer que lorsqu'on cherche le *maximum* ou le *minimum* d'une fonction de z, dépendante de x et de y, on établit que le plan tangent à la surface qui représente cette équation est parallèle au plan des x, y, puisqu'on fait en même temps $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$, circonstance analogue à ce qu'on a vu nos 133 et 134.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

De l'intégration des fonctions rationnelles d'une seule variable.

145. Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel ; il a pour but de remonter des coefficiens différentiels aux fonctions dont ils dérivent. L'exposition des principes de ce Calcul présente des divisions analogues à celles qu'offre le Calcul différentiel. Il peut arriver que la composition des coefficiens différentiels de la fonction cherchée soit donnée immédiatement par les variables indépendantes, ou qu'on ait seulement une équation entre quelques-uns de ces coefficiens et une ou plusieurs des variables : le pre-

mier cas étant le plus simple, c'est celui qu'il convient de traiter d'abord.

Lorsque le coefficient différentiel du premier ordre d'une fonction de x est donné en x, on a $\frac{dy}{dx}=X$, ou $dy=Xdx$; la fonction cherchée est donc celle dont la différentielle est Xdx; et on l'indique comme il suit : $y=\int Xdx$, la caractéristique $\int$ étant l'inverse de la caractéristique d (*). Pour trouver cette fonction, il faut renverser les règles de la différentiation; mais afin de procéder avec ordre, je m'occuperai successivement des différentes formes que peut avoir la fonction donnée X, et qui se classent ainsi qu'il suit : fonctions rationnelles,

$$Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots\ldots=U$$

$$\frac{Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots\ldots}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}+\ldots}=\frac{U}{V},$$

fonctions irrationnelles,

$$U.V^{\frac{m}{n}},$$

fonctions transcendantes,

$$f(U, lU), \quad f(U, \sin V), \text{ etc.}$$

(*) La lettre $\int$ a été employée par ceux qui ont écrit les premiers sur le Calcul intégral, comme l'initiale du mot *somme*, parce-que, suivant les idées de Leibnitz, les différentielles représentant les accroissemens infiniment petits des variables, il s'ensuit qu'une variable quelconque est la somme du nombre infini d'accroissemens qu'elle a reçus depuis son origine jusqu'au moment où on la considère; et c'est pour cela qu'ils ont donné à la fonction que nous appelons *primitive* le nom d'*Intégrale*, comme étant le résultat de l'agrégation de toutes les différentielles : ces dénominations étant bien entendues, on peut se servir indifféremment de l'une ou de l'autre.

146. La différentielle de $Ax^m + B$ étant $mAx^{m-1}dx$, on en conclura que l'intégrale de $ax^n dx$ est $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + B$, car en comparant $ax^n dx$ avec $mAx^{m-1}dx$, on a

$$m - 1 = n, \quad \text{et} \quad mA = a \quad \text{ou} \quad A = \frac{a}{m} = \frac{a}{n+1}.$$

Il résulte de cet exemple, que lorsque

$$dy = ax^n dx, \quad y = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + B,$$

c'est-à-dire, que *pour intégrer la différentielle monome* $ax^n dx$, *il faut augmenter l'exposant de la variable d'une unité, puis diviser par le nouvel exposant et par* dx.

La constante B est arbitraire (8). On peut lui donner une forme semblable à celle du premier terme; car si on désigne par b la valeur de x, qui rend la fonction y nulle, on aura $\frac{ab^{n+1}}{n+1} + B = 0$, d'où $B = -\frac{ab^{n+1}}{n+1}$, et parconséquent

$$y = \frac{a(x^{n+1} - b^{n+1})}{n+1},$$

résultat qui ne diffère du précédent que dans la forme qu'on a donnée à la constante.

147. Avant d'aller plus loin, il est à propos d'examiner un cas particulier dans lequel la valeur de y trouvée ci-dessus devient $\frac{0}{0}$; c'est celui où $n = -1$, car on a alors

$$y = \frac{a(x^0 - b^0)}{0} = \frac{a(1-1)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Pour trouver la vraie valeur de cette fonction, il faut recourir à la règle du n° 52; et comme on a vu par cette règle, page 73, que $\frac{a^x - b^x}{x}$ se réduisait à $la - lb$, dans la supposition de $x = 0$, on aura dans l'exemple actuel, en changeant les lettres convenablement, $y = a(lx - lb)$; mais lorsque $n = -1$, on a $dy = ax^{-1}dx$: donc $dy = \frac{adx}{x}$ donne

$$y = a\,(lx - lb) \quad \text{ou} \quad y = alx + B.$$

On aurait conclu la même chose du n° 27, puisque par ce numéro, l'on a $dlx = \frac{dx}{x}$. L'exception que présente ici la règle du n° 146, tient à l'impossibilité d'exprimer la transcendante lx en un nombre fini de termes algébriques.

Toute la difficulté de l'intégration des fonctions d'une seule variable ne consiste plus que dans la recherche des transformations propres à réduire les fonctions proposées à un ou plusieurs monomes, à chacun desquels on puisse appliquer la règle du n° précédent.

148. Il est d'abord évident que

$$dy = ax^m dx + bx^n dx + cx^p dx \ldots\ldots$$

donne

$$y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} \ldots + B.$$

Je n'ajoute qu'une constante arbitraire, car il est aisé de voir que si on en ajoutait une pour chaque monome, elles n'équivaudraient toutes ensemble qu'à une seule, qui serait égale à leur somme.

En général, puisqu'on a vu, n° 10, que

$$d(u+v-w)=du+dv-dw,$$

on en doit conclure que

$$\int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw,$$

et que

$$\int(Pdx+Qdx-Rdx)=\int Pdx+\int Qdx-\int Rdx.$$

Je ferai remarquer dès ce moment une conséquence de cette règle, qui sera fort utile dans la suite. En intégrant à part chaque terme de la différentielle $d.uv=udv+vdu$ (11); il vient $uv=\int vdu+\int udv$, ce qui donne relation entre les fonctions primitives des différentielles udv, vdu, ensorte que l'une étant connue, l'autre l'est aussi : on a, par exemple, $\int udv=uv-\int vdu$. La différentielle

$$d.\frac{u}{v}=\frac{du}{v}-u\frac{dv}{v^2}\ (12),$$

donnera de même

$$\frac{u}{v}=\int\frac{du}{v}-\int u\frac{dv}{v^2},$$

d'où on tirera

$$\int u\frac{dv}{v^2}=-\frac{u}{v}+\int\frac{du}{v}.$$

Il est bon d'observer que ce résultat n'est qu'une conséquence du précédent; car en substituant dans la valeur de $\int udv$, trouvée ci-dessus, $\frac{dv}{v^2}$ au lieu de dv,

ce qui revient à changer ν en $-\frac{1}{\nu}$, puisque

$$\frac{d\nu}{\nu^2}=\nu^{-2}du=-d.\nu^{-1}=-d.\frac{1}{\nu},$$

on aura

$$\int u\frac{d\nu}{\nu^2}=-\frac{u}{\nu}+\int\frac{du}{\nu}.$$

Il suit de ce que $d.au=adu$, que $\int aXdx=a\int Xdx$, et qu'on peut faire sortir du signe $\int$ la constante a.

149. Si on se donnait $dy=(ax+b)^m dx$, on développerait la puissance indiquée, et on intégrerait chaque monome qui résulterait de cette opération; mais il est bon d'observer qu'on peut arriver au résultat sans effectuer le développement. Il suffit de faire $ax+b=z$, ce qui donne $x=\frac{z-b}{a}$, $dx=\frac{dz}{a}$; substituant dans l'expression de dy, on trouve $dy=\frac{z^m dz}{a}$, et parconséquent $y=\frac{z^{m+1}}{a(m+1)}+B$. Mettant pour z sa valeur, on aura donc, lorsque

$$dy=(ax+b)^m dx,\quad y=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+B.$$

Si on avait $dy=(ax^n+b)^m x^{n-1}dx$, la transformation réussirait encore, car en posant $ax^n+b=z$, il en résulterait $nax^{n-1}dx=dz$, d'où

$$x^{n-1}dx=\frac{dz}{na},\ dy=\frac{z^m dz}{na}\ \text{ et } y=\frac{z^{m+1}}{na(m+1)}+B,$$

ce qui donne, lorsque

$$dy=(ax^n+b)^m x^{n-1}dx,\quad y=\frac{(ax^n+b)^{m+1}}{na(m+1)}+B.$$

150. Je passe aux fonctions fractionnaires, et pour commencer par le cas le plus simple, je suppose qu'on ait $dy = \frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$; en faisant $ax+b=z$, on trouve

$$x = \frac{z-b}{a}, \qquad dx = \frac{dz}{a},$$

et parconséquent

$$dy = \frac{A(z-b)^m dz}{a^{m+1}z^n};$$

développant la puissance $(z-b^m)$, multipliant le résultat par dz et divisant après par z^n, on aura une suite de monomes à intégrer.

Prenons pour exemple le cas où $m=3$ et $n=2$; il viendra

$$dy = \frac{A(z-b)^3 dz}{a^4 z^2} = \frac{A}{a^4}[zdz - 3bdz + 3b^2 z^{-1}dz - b^3 z^{-2}dz]:$$

en appliquant à chacun de ces monomes la règle générale, il en résultera

$$y = \frac{A}{a^4}\left[\frac{z^2}{2} - 3bz + 3b^2 lz + b^3 z^{-1}\right] + B.$$

On remettra ensuite pour z sa valeur, et l'on aura enfin, lorsque $dy = \frac{Ax^3 dx}{(ax+b)^2}$

$$y = \frac{A}{a^4}[\tfrac{1}{2}(ax+b)^2 - 3b(ax+b) + 3b^2 l(ax+b) + b^3(ax+b)^{-1}] + B.$$

On construirait sans peine la formule générale; et si on avait

$$dy = \frac{Ax^m dx + Bx^p dx + Cx^q dx \ldots\ldots\ldots}{(ax+b)^n},$$

on l'écrirait comme il suit

$$dy = \frac{Ax^n dx}{(ax+b)^m} + \frac{Bx^p dx}{(ax+b)^m} + \frac{Cx^q dx}{(ax+b)^m} \ldots\ldots$$

et on opérerait sur chaque terme en particulier, comme je viens de le faire sur le premier.

151. Les différentielles fractionnaires et rationnelles sont en général de la forme

$$\frac{(Ax^m + Bx^n + Cx^p \ldots) dx}{A'x^{m'} + B'x^{n'} + C'x^{p'}},$$

que pour abréger je représenterai par $\frac{U dx}{V}$. Il faut d'abord observer que l'exposant de x dans le numérateur peut être supposé moindre que dans le dénominateur, car si cela n'était pas, en divisant U par V, et nommant q le quotient de cette division et R le reste, il viendrait $\int \frac{U dx}{V} = \int Q dx + \int \frac{R dx}{V}$; mais Q étant une fonction rationnelle et entière, $\int Q dx$ s'obtiendrait par l'application immédiate de la règle du nº 146, et il ne resterait plus à trouver que $\int \frac{R dx}{V}$, formule dans laquelle la fonction R est par rapport à x d'un degré moins élevé que la fonction V. La forme la plus générale que puisse avoir la fraction $\frac{U dx}{V}$ sera donc

$$\frac{(Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + T) dx}{x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} \ldots + T'}$$

La méthode générale pour intégrer les différentielles exprimées par des fractions rationnelles, consiste à les décomposer en d'autres dont les dénominateurs soient

soient plus simples, qu'on désigne sous le nom de *fractions partielles*, et qu'on obtient comme il suit :

En égalant à zéro le dénominateur de la fraction proposée, on formera l'équation

$$x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} \ldots\ldots + T' = 0,$$

et concevant qu'on ait déterminé les diverses racines de cette équation, on les représentera par

$$-a, \quad -a', \quad -a'', \quad -a''', \text{ etc.}$$

en supposant qu'elles soient toutes inégales ; par ce moyen, le premier membre de l'équation ci-dessus, ou le dénominateur de la fraction proposée, sera mis sous la forme d'un produit de n facteurs

$$x+a, \quad x+a', \quad x+a'', \quad x+a''', \text{ etc.}$$

Cela fait, on regardera la fraction proposée comme la somme des fractions

$$\frac{N}{x+a}, \quad \frac{N'}{x+a'}, \quad \frac{N''}{x+a''}, \text{ etc.}$$

ayant pour dénominateurs les facteurs du dénominateur de la proposée et pour numérateurs des constantes indéterminées.

Je suppose, pour fixer les idées, que la différentielle à intégrer soit celle-ci

$$\frac{(Ax^2 + Bx + C)dx}{x^3 + A'x^2 + B'x + C'},$$

et qu'on ait trouvé

$$x^3 + A'x^2 + B'x + C' = (x+a)(x+a')(x+a'').$$

En réduisant au même dénominateur les fractions

$$\frac{N\mathrm{d}x}{x+a}, \quad \frac{N'\mathrm{d}x}{x+a'}, \quad \frac{N''\mathrm{d}x}{x+a''},$$

et en les ajoutant il viendra

$$\frac{N(x+a')(x+a'')+N'(x+a)(x+a'')+N''(x+a)(x+a')}{(x+a)(x+a')(x+a'')}\mathrm{d}x;$$

le dénominateur sera le même que celui de la proposée, et le numérateur sera nécessairement une fonction du degré inférieur à celui du numérateur, c'est-à-dire, du second degré. En développant, on a en effet

$$[(N+N'+N'')x^2+(N(a'+a'')+N'(a+a'')+N''(a+a'))x$$
$$+Na'a''+N'aa''+N''aa']\mathrm{d}x.$$

Cette fonction étant comparée avec le numérateur de la fraction proposée, donne les trois équations,

$$N+N'+N''=A,$$
$$N(a'+a'')+N'(a+a'')+N''(a+a')=B$$
$$Na'a''+N'aa''+N''aa'=C,$$

qui ne sont que du premier degré, par rapport aux indéterminées N, N' et N''; et lorsqu'elles seront résolues, on aura

$$\frac{(Ax^2+Bx+C)\mathrm{d}x}{x^3+A'x^2+B'x+C'}=\frac{N\mathrm{d}x}{x+a}+\frac{N'\mathrm{d}x}{x+a'}+\frac{N''\mathrm{d}x}{x+a''}.$$

En faisant $x+a=z$, on verra que la différentielle $\frac{N\mathrm{d}x}{x+a}$ se transforme en $\frac{N\mathrm{d}z}{z}$ et a pour intégrale $N\mathrm{l}z$, ou $N\mathrm{l}(x+a)$. On trouvera de même que

$$\int\frac{N'\mathrm{d}x}{x+a'}=N'\mathrm{l}(x+a'), \qquad \int\frac{N''\mathrm{d}x}{x+a''}=N''\mathrm{l}(x+a'');$$

et on aura parconséquent

$$\int\frac{(Ax^2+Bx+C)\mathrm{d}x}{x^3+A'x^2+B'x+C'}$$
$$=N\mathrm{l}(x+a)+N'\mathrm{l}(x+a')+N''\mathrm{l}(x+a'')+const.$$
$$=\mathrm{l}\,[(x+a)^N(x+a')^{N'}(x+a'')^{N''}]+const.$$

Ce procédé, qu'il est facile d'étendre à la formule générale citée au commencement de l'article, montre que l'intégration des fractions rationnelles n'a, dans le cas où leur dénominateur se décompose en facteurs réels et inégaux, d'autre difficulté que cette décomposition, qui revient à la résolution numérique des équations.

152. Ce qui précède suppose que tous les facteurs du dénominateur de la fraction proposée soient inégaux; car dans le cas contraire, la décomposition de cette fraction ne pourra plus avoir lieu dans la forme indiquée: on le voit immédiatement sur $\frac{Ax+B}{(x+a)^2}$, qu'on ne saurait représenter par $\frac{N}{x+a}+\frac{N'}{x+a}$, puisque ces deux fractions n'en forment qu'une seule $\frac{N+N'}{x+a}$.

Si le dénominateur $x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}\ldots+T'$, de la fraction proposée, renferme un facteur $(x+a)^p$, il faudra prendre pour ce facteur une fraction partielle de la forme

$$\frac{(Px^{p-1}+Qx^{p-2}+Rx^{p-3}\ldots+Y)\mathrm{d}x}{(x+a)^p};$$

on déterminera les coefficiens de son numérateur en la réduisant au même dénominateur avec les autres frac-

tions partielles, et en comparant la somme des numérateurs avec celui de la proposée (151).

On intégrerait ensuite, par la règle du n° 150; mais il est facile devoir que l'on peut substituer à la fraction

$$\frac{(Px^{p-1}+Qx^{p-2}\ldots\ldots+Y)\,dx}{(x+a)^p},$$

l'expression

$$\frac{N dx}{(x+a)^p}+\frac{N' dx}{(x+a)^{p-1}}+\frac{N'' dx}{(x+a)^{p-2}}\cdots+\frac{N^{'''\cdots} dx}{x+a};$$

car en réduisant tous les termes de celle-ci au même dénominateur, le numérateur qu'on obtiendra sera de la même forme que celui de la première. Cela posé, soit $x+a=z$, il viendra

$$\int\frac{N dx}{(x+a)^p}=\int\frac{N dz}{z^p}=\frac{Nz^{-p+1}}{1-p}=\frac{N}{(1-p)(x+a)^{p-1}};$$

on trouvera de même

$$\int\frac{N' dx}{(x+a)^{p-1}}=\frac{N'}{(2-p)(x+a)^{p-2}},$$

et ainsi des autres : toutes ces intégrales seront algébriques, la dernière seule, $\frac{N^{'''\cdots} dx}{x+a}$, renfermera un logarithme.

153. Si les valeurs de a, a', a'', etc. étaient imaginaires, elles introduiraient des expressions de cette nature dans les numérateurs des fractions partielles : on pourrait à la vérité faire disparaître les imaginaires; mais cela compliquerait le calcul, et on évite cette difficulté en ne décomposant le dénominateur de la fraction proposée qu'en facteurs réels, soit du premier, soit du second degré, ce qui est toujours possible (*Compl. des*

Elém. d'Alg. 27). Les facteurs du second degré, qui contiennent des racines imaginaires, peuvent être représentés par

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2;$$

et s'il s'en trouve plusieurs qui soient égaux, le dénominateur de la fraction proposée aura des facteurs de la forme

$$(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q.$$

Au facteur simple $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, correspondra une fraction partielle de la forme

$$\frac{(Kx+L)\mathrm{d}x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2},$$

et aux facteurs de la seconde espèce, la fraction

$$\frac{(Q'x^{2q-1}+R'x^{2q-2}\ldots+Y')\mathrm{d}x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q};$$

mais pour faciliter l'intégration, et par analogie avec les formules du n° précédent, on substitue à cette dernière, l'expression suivante :

$$\frac{(Kx+L)\mathrm{d}x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q}+\frac{(K'x+L')\mathrm{d}x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{q-1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(K^{\text{n}\cdots}x+L^{\text{n}\cdots})\mathrm{d}x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}.$$

Les coefficiens des numérateurs pourront se déterminer ainsi qu'on l'a indiqué dans les n°s 151, 152.

Pour intégrer la fraction

$$\frac{(Kx+L)\mathrm{d}x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2},$$

on observera que

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=(x+\alpha)^2+\beta^2;$$

on fera

$$x+\alpha=z,$$

il viendra

$$\frac{(Kx+L)\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{(Kz+L-K\alpha)\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=\frac{(Kz+L_1)\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2},$$

en prenant

$$L-K\alpha=L_1.$$

Mais

$$\frac{(Kz+L_1)\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=\frac{Kz\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}+\frac{L_1\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}:$$

la première partie du second membre de l'équation ci-dessus est intégrable; car en faisant $z^2+\beta^2=u$, on a $z\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}u}{2}$, ce qui donne

$$\int\frac{Kz\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=\frac{K}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=K.\frac{1}{2}\,\mathrm{l}u=K\mathrm{l}\sqrt{z^2+\beta^2}.$$

Quant à la seconde partie, si on y fait $z=\beta u$, on la change en

$$\frac{L_1\mathrm{d}z}{z^2+\beta^2}=\frac{L_1}{\beta}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1};$$

mais on a vu, n° 35, que $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ est la différentielle de l'arc dont la tang $=u$: donc

$$\int\frac{L_1}{\beta}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\frac{L_1}{\beta}\,\text{arc}\,(\text{tang}=u)+\textit{const.}$$
$$=\frac{L_1}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{z}{\beta}\right)+\textit{const.};$$

réunissant ces deux résultats, on obtiendra

$$\int \frac{(Kz+L_1)dz}{z^2+\beta^2} = Kl\sqrt{z^2+\beta^2} + \frac{L_1}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right)$$
$$+ \,const.$$

Il est bon de remarquer que l'arc dont la tangente est $\frac{z}{\beta}$ a pour sinus $\frac{z}{\sqrt{z^2+\beta^2}}$, pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{z^2+\beta^2}}$; car cette considération offre le moyen de présenter l'intégrale proposée sous plusieurs formes, en désignant l'arc par son sinus ou par son cosinus.

Lorsqu'on remet pour z sa valeur, on trouve

$$\int \frac{(Kx+L)dx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = const.$$
$$+Kl\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} + \frac{L-K\alpha}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x+\alpha}{\beta}\right).$$

Pour intégrer la différentielle

$$\frac{(Kx+L)dx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^q},$$

on fera d'abord $x+\alpha = z$ et $L-K\alpha = L_1$; par ce moyen on n'aura plus à trouver que $\int \frac{(Kz+L_1)dz}{(z^2+\beta^2)^q}$, peut s'écrire ainsi :

$$K\int \frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^q} + L_1\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}.$$

La première partie est intégrable immédiatement; et cela se voit en faisant $z^2+\beta^2 = u$, puisqu'on a $zdz = \frac{du}{2}$,

d'où l'on tire

$$K\int\frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^q}=\frac{K}{2}\int\frac{du}{u^q}=\frac{Ku^{-q+1}}{2(1-q)};$$

et quant à la seconde partie, on fait dépendre son intégration de celle de la formule $\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}}$, dans laquelle l'exposant du dénominateur est moindre d'une unité.

154. En effet si on pose l'équation

$$\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}=\frac{Gz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}}+H\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}};$$

G et H étant deux constantes indéterminées, qu'on prenne les différentielles de chaque membre, et qu'on réduise au même dénominateur tous les termes du résultat, on pourra supprimer ce dénominateur, ainsi que le facteur commun dz; il viendra

$$1=G(z^2+\beta^2)-2(q-1)Gz^2+H(z^2+\beta^2);$$

puis en comparant les termes semblables, on formera deux équations,

$$1=G\beta^2+H\beta^2,\quad G-2(q-1)G+H=0,$$

lesquelles donneront

$$G=\frac{1}{(2q-2)\beta^2},\quad H=\frac{(2q-3)}{(2q-2)\beta^2};$$

on aura parconséquent

$$\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}=\left\{\frac{1}{(2q-2)\beta^2}\cdot\frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{(2q-3)}{(2q-2)\beta^2}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(a).$$

Cette formule donne le moyen d'abaisser jusqu'au premier degré la puissance du dénominateur de la différentielle proposée; car si on met $q-1$ à la place de q, on trouvera

$$\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-1}}=\frac{1}{(2q-4)\beta^2}\,\frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-2}}+\frac{(2q-5)}{(2q-4)\beta^2}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-2}};$$

substituant cette valeur dans la même équation (a), il en résultera

$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}=\Big\{&\frac{1}{(2q-2)\beta^2}\cdot\frac{z}{(z+\beta^2)^{q-1}}\\&+\frac{1.(2q-3)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4}\cdot\frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-2}}\\&+\frac{(2q-3)(2q-5)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-2}}\ldots\ldots.(b).\end{aligned}$$

On obtiendra de même la valeur de $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-2}}$, en changeant q en $q-2$; si on remet ensuite cette valeur dans l'équation (b), on aura

$$\begin{aligned}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}=L_1\Big\{&\frac{1}{(2q-2)\beta^2}\cdot\frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-1}}\\&+\frac{1.(2q-3)}{(2q-2)(2q-4)\beta^4}\cdot\frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-2}}\\&+\frac{1.(2q-3)(2q-5)}{(2q-2)(2q-4)(2q-6)\beta^6}\cdot\frac{z}{(z^2+\beta^2)^{q-3}}\\&+\frac{(2q-3)(2q-5)(2q-7)}{(2q-2)(2q-4)(2q-6)\beta^6}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-3}}\Big\}\ldots.(c).\end{aligned}$$

Si on déduisait encore de l'équation (a) la valeur de $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-3}}$, on aurait une nouvelle valeur de $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}$, qui dépendrait de $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{q-4}}$. En continuant d'opérer ainsi, on formera une suite, qu'il faudra borner au terme $\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}$; car le terme suivant, affecté de $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^0}$, aurait un coefficient infini. On peut s'en assurer en faisant successivement $q=2$, et $q=3$, dans les équations (b) et (c) ; et il est aisé de sentir à quoi tient cette circonstance ; car si l'on pouvait arriver jusqu'au terme dont je viens de parler, on aurait algébriquement l'intégrale de la fraction proposée, puisque

$$\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^0}=\int dz.$$

On voit ici l'origine d'une méthode d'intégration qui est aussi féconde qu'élégante ; c'est celle par laquelle on passe d'une intégrale à une autre : je la développerai par la suite d'une manière plus générale.

En rapprochant les résultats des n^{os} précéd., on remarquera sans doute, que les différentielles qui se présentent sous la forme de fractions rationnelles, peuvent toujours s'intégrer, soit algébriquement, soit par le moyen des logarithmes ou des arcs de cercle, et qu'il n'est besoin pour les préparer, que de les décomposer en fractions dont les dénominateurs soient des binomes ou des trinomes. Je n'ai encore indiqué pour cette opération que la méthode des coefficiens indéterminés, parceque c'est celle qui se présente la première ; mais voici plusieurs procédés qui exigent moins de calcul.

155. Je reprends la fraction $\frac{U}{V}$. Soit $x+a$ un des facteurs inégaux du dénominateur V, ensorte qu'on ait $V=(x+a)\,Q$, Q ne contenant pas $x+a$; si on fait $\frac{U}{V}=\frac{A}{x+a}+\frac{P}{Q}$, P étant une fonction indéterminée de x, mais dans laquelle cette quantité n'entre point comme diviseur, on aura $U=AQ+P(x+a)$, d'où on tirera $P=\frac{U-AQ}{x+a}$. Comme P doit être une fonction entière par rapport à x, il faut que la quantité $U-AQ$, qui est aussi une fonction rationnelle et entière de x, soit divisible par $x+a$, ou, ce qui est la même chose, s'évanouisse lorsqu'on mettra au lieu de x, la valeur $-a$ que donne le facteur $x+a$ égalé à zéro: désignant donc par u et par q, ce que deviennent U et Q après cette substitution qui ne change rien à la valeur de l'indéterminée A, puisqu'elle est indépendante de x, il viendra $u-Aq=0$, et parconséquent $A=\frac{u}{q}$.

Le facteur Q se trouve en divisant V par $x+a$; mais sa valeur q, relative à la supposition de $x+a$, s'obtient immédiatement en différentiant l'équation $V=(x+a)\,Q$, car il vient

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=Q+(x+a)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x};$$

et si on fait dans ce résultat $x+a=0$, puis qu'on représente par v ce que devient alors $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$, on aura $v=q$; d'où $A=\frac{u}{v}$.

L'expression $A=\frac{u}{q}$ aura toujours une valeur finie; car le numérateur et le dénominateur ne sauraient devenir nuls, puisque la fraction proposée est réduite à sa plus simple expression, et que parconséquent la fonction U ne peut contenir le facteur $x+a$ qui fait partie du dénominateur, et qui, ne s'y trouvant qu'une fois, n'entre point non plus dans Q. En appliquant d'une manière convenable ce raisonnement aux différens cas qui peuvent se présenter, on se convaincra que la décomposition d'une fraction rationnelle quelconque, dans les formes indiquées ci-dessus, est toujours possible.

156. Voyons maintenant comment on peut trouver les numérateurs des fractions partielles qui répondent aux facteurs égaux du premier degré. Dans ce cas on a $V=Q(x+a)^n$, et on doit supposer

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{(x+a)^n}+\frac{A_1}{(x+a)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x+a)^{n-2}}\cdots+\frac{A_{n-1}}{x+a}+\frac{P}{Q};$$

en réduisant au même dénominateur, il viendra

$$U=Q[A+A_1(x+a)+A_2(x+a)^2\ldots+A_{n-1}(x+a)^{n-1}]+P(x+a)^n,$$

$$P=\frac{U-Q[A+A_1(x+a)+A_2(x+a)^2\ldots+A_{n-1}(x+a)^{n-1}]}{(x+a)^n};$$

et comme P doit être une fonction entière, il faudra que le numérateur de son expression soit divisible n fois de suite par $x+a$: ce numérateur s'évanouira donc lorsqu'on y mettra $-a$ au lieu de x. On voit d'abord qu'il se réduit dans ce cas à $U-QA$; mais pour que $U-QA$ soit divisible par $x+a$, il faut, en conservant les mêmes dénominations que dans le n° précédent, qu'on ait

$u-qA=0$ ou $A=\frac{u}{q}$.

Cette valeur changera la quantité $U-QA$ en $U-\frac{u}{q}Q$ qui se divisera par $x+a$; et on aura en effaçant en même temps ce facteur dans le dénominateur, et faisant pour abréger $U-\frac{u}{q}Q=U_1(x+a)$,

$$P=\frac{U_1-Q[A_1+A_2(x+a)\ldots\ldots+A_{n-1}(x+a)^{n-2}]}{(x+a)^{n-1}}.$$

Maintenant pour obtenir A_1, on fera $x+a=0$, et en désignant par u_1, ce que devient U_1, par la substitution de $-a$ à la place de x, on aura $u_1-qA_1=0$, ou $A_1=\frac{u_1}{q}$.

Mettant ensuite au lieu de A_1 sa valeur dans U_1-QA_1, il en résultera la quantité $U_1-\frac{u_1}{q}Q$, qui, s'évanouissant lorsque $x+a=0$, sera divisible par $x+a$, et parconséquent P se réduira à

$$P=\frac{U_2-Q[A_2+A_3(x+a)\ldots\ldots+A_{n-1}(x+a)^{n-3}]}{(x+a)^{n-2}},$$

U_2 représentant le quotient de la division de $U_1-\frac{u_1}{q}Q$ par $x+a$. En continuant le même procédé et la même notation, on trouvera encore $u_2-qA_2=0$, d'où $A_2=\frac{u_2}{q}$, et ainsi des autres.

Le Calcul différentiel facilite beaucoup les opérations précédentes. En effet si on différentie successivement $n-1$ fois l'équation

$$U=Q[A+A_1(x+a)+A_2(x+a)^2\ldots\ldots\ldots\ldots +A_{n-1}(x+a)^{n-1}]+P(x+a)^n,$$

et qu'on fasse ensuite $x+a=0$, dans cette équation

et dans celles qu'on en aura déduites, il viendra

$$U = AQ$$
$$dU = AdQ + A_1 Q dx$$
$$d^2U = Ad^2Q + 2A_1 dQdx + 2A_2 Q dx^2$$
$$d^3U = Ad^3Q + 3A_1 d^2Q dx + 6A_2 dQ dx^2 + 6A_3 Q dx^3$$
etc.

équations qui déterminent chacune des inconnues A, A_1, A_2, etc., par celles qui la précèdent; bien entendu qu'il faudra écrire après les différentiations $-a$ au lieu de x.

Le moyen le plus simple pour obtenir la valeur de Q, dans ce cas, est de diviser V par $(x+a)^n$, cependant on peut y parvenir par la différentiation, comme dans le n° précédent; car puisqu'on a $V = Q(x+a)^n$, en différentiant un nombre n de fois chacun des membres de cette équation, et faisant ensuite $x + a = 0$, on trouvera $d^nV = 1.2\ldots nQdx^n$ (52), et parconséquent $Q = \frac{d^nV}{1.2\ldots ndx^n}$.

On parviendra à l'expression des différentielles de Q dans l'hypothèse de $x + a = 0$, en prenant successivement celles de l'ordre $n+1$, $n+2$, etc. de l'équation $V = Q(x+a)^n$; car il est aisé de voir, d'après la remarque du n° 52, que dans ce cas $d^{n+1}V = d^{n+1}.Q(x+a)^n$, par exemple, se réduit à $d^{n+1}V = 1.2.3\ldots(n+1)dQdx^n$. Il suit de là qu'on pourra exprimer les indéterminées A_1, A_2, A_3, etc. à l'aide des différentielles du numérateur U et de celles du dénominateur V, de la fraction proposée.

157. Le procédé du n° 155 étant très-peu modifié,

sert aussi à trouver le numérateur d'une fraction partielle de la forme

$$\frac{Ax+B}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}.$$

Soit

$$\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}+\frac{P}{Q};$$

en réduisant le second membre au même dénominateur que le premier, on trouve

$$U=Q(Ax+B)+P(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2),$$

d'où on tire ensuite

$$P=\frac{U-Q(Ax+B)}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}.$$

Comme P doit toujours être une fonction entière par rapport à x, il faut que la quantité $U-Q(Ax+B)$, soit divisible par $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$; elle doit donc renfermer au nombre de ses facteurs, ceux de cette dernière, et s'évanouir parconséquent dans les mêmes circonstances. Mais les facteurs de $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, sont $x+\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $x+\alpha-\beta\sqrt{-1}$; si on les égale à zéro, on aura $x=-(\alpha+\beta\sqrt{-1})$, $x=-(\alpha-\beta\sqrt{-1})$: ces valeurs étant substituées successivement dans $U-Q(Ax+B)$, doivent faire évanouir cette quantité. Désignant donc par $u\pm u'\sqrt{-1}$, et par $q\pm q'\sqrt{-1}$, ce que deviennent U et Q, après cette transformation on aura

$$u\pm u'\sqrt{-1}-(q\pm q'\sqrt{-1})[-A(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+B]=0.$$

Cette équation est double à cause du signe $\pm$ dont sont affectés plusieurs de ses termes, et elle est équivalente

à celles qu'on formerait, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire ; d'après cette considération on aura

$$u + q\alpha A - q'\beta A - q B = 0,$$
$$u' + q\beta A + q'\alpha A - q'B = 0,$$

équations qui donneront les valeurs de A et de B.

On peut trouver q et q' à-peu-près comme on a trouvé q dans le n° 155. En effet, si on différentie l'équation

$$Q(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) = V,$$

et qu'on fasse ensuite

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

il viendra.

$$Q(2x\text{d}x + 2\alpha\text{d}x) = \text{d}V, \text{ ou } Q = \frac{\text{d}V}{2x\text{d}x + 2\alpha\text{d}x};$$

substituant au lieu de x ses deux valeurs $-(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$, représentant par $v \pm v'\sqrt{-1}$, ce que devient alors $\frac{\text{d}V}{\text{d}x}$, et écrivant $q \pm q'\sqrt{-1}$ pour Q, il viendra

$$q \pm q'\sqrt{-1} = \frac{v \pm v'\sqrt{-1}}{\mp 2\beta\sqrt{-1}};$$

multipliant les deux termes de la fraction du second membre par $\sqrt{-1}$, et égalant ensuite les parties réelles et les parties imaginaires de chaque membre, on aura

$$q = -\frac{v'}{2\beta}, \qquad q' = \frac{v}{2\beta}.$$

158. Si le facteur $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, que pour abréger,

abréger, je représenterai par R, se trouvait plusieurs fois dans le dénominateur V, et qu'on eût

$$V = Q(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n = QR^n,$$

on prendrait dans ce cas (153),

$$\frac{Ax+B}{R^n} + \frac{A_1x+B_1}{R^{n-1}} + \frac{A_2x+B_2}{R^{n-2}} \ldots\ldots + \frac{P}{Q};$$

réduisant au même dénominateur, et tirant la valeur de P, on trouvera

$$P = \frac{U - Q[Ax+B+(A_1x+B_1)R+(A_2x+B_2)R^2+\ldots]}{R^n}$$

En raisonnant dans ce cas comme dans les précédens, on conclura que le numérateur de cette expression doit s'évanouir par la substitution de $-(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$, qui rend aussi $R = 0$; et gardant les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura après cette opération

$$u \pm u'\sqrt{-1} - (q \pm q'\sqrt{-1})[-A(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) + B] = 0,$$

ce qui donnera, pour déterminer A et B, les mêmes équations que dans le n° précédent. Ayant trouvé les valeurs de ces quantités, on les substituera dans le numérateur de P; et les termes $U - Q(Ax+B)$ devenant divisibles par R, ou $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, l'expression entière le deviendra aussi : nommant donc U_1, le quotient de $U - Q(Ax+B)$ par $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, on aura

$$P = \frac{U_1 - Q[A_1x+B_1+(A_2x+B_2)R+\ldots]}{R^{n-1}}.$$

En remettant, dans ce nouveau numérateur, pour x, les

valeurs que donne l'équation $R=0$, et égalant le résultat à zéro, on déterminera A_1 et B_1, comme on a déterminé plus haut A et B, et on continuera d'opérer de la même manière, pour parvenir aux valeurs des lettres A_2, B_2, A_3, B_3, etc.

Ce cas est parfaitement analogue à celui qu'on a traité dans le n° 156; et le Calcul différentiel s'applique de la même manière, à l'un et à l'autre, au moyen de l'équation

$$U=Q[Ax+B+(A_1x+B_1)R+(A_2x+B_2)R^2+\ldots]+PR^n,$$

et de ses différentielles, dans lesquelles, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, le terme PR^n s'évanouit lorsqu'on fait $R=0$. On obtiendra de cette manière les équations

$$U=(Ax+B)Q$$
$$\mathrm{d}U=(Ax+B)\mathrm{d}Q+AQ\mathrm{d}x+(A_1x+B_1)Q\mathrm{d}R,$$
etc.

chacune desquelles deviendra double, lorsqu'on mettra pour x les valeurs dont il est susceptible en vertu de l'équation $R=0$, ou $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0$. En égalant séparément à zéro, la partie réelle et la partie imaginaire, on obtiendra un nombre suffisant d'équations, pour déterminer A, B, A_1, B_1, etc.

Il faut encore remarquer que de

$$V=Q(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n,$$

on tirera

$$Q=\frac{\mathrm{d}^nV}{\mathrm{d}^n.(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^n},$$

lorsqu'on supposera

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=0.$$

On trouvera dQ, d^2Q, etc. dans la même hypothèse, en prenant les différentielles des ordres $n+1$, $n+2$, etc. de l'équation

$$V = Q(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^n,$$

et supprimant ensuite les termes que cette hypothèse rend nuls.

159. Je vais donner maintenant quelques applications de ce qui précède. Soit la fraction $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$: les facteurs de son dénominateur sont faciles à découvrir ; car il peut se mettre sous la forme

$$x^3(x^5+x^4-x-1) = x^3(x+1)(x^4-1).$$

Le facteur x^4-1, se décompose en x^2-1 et x^2+1, ou $x-1$, $x+1$ et x^2+1 : on a donc

$$x^8+x^7-x^4-x^3 = x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1);$$

et parconséquent la fraction proposée est décomposable comme il suit (151, 152, 153) :

$$\frac{Adx}{x-1} + \frac{Bdx}{(x+1)^2} + \frac{Cdx}{x+1}$$
$$+ \frac{Ddx}{x^3} + \frac{Edx}{x^2} + \frac{Fdx}{x} + \frac{(Gx+H)dx}{1+x^2}.$$

En réduisant au même dénominateur, et comparant le résultat avec $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$, on déterminerait les numérateurs inconnus ; mais je vais faire usage des procédés indiqués ci-dessus.

Pour cela je considère séparément les quatre facteurs

$$x-1, \quad (x+1)^2, \quad x^3 \text{ et } x^2+1,$$

qui forment le dénominateur de la fraction proposée ; au premier répond une fraction de la forme $\frac{A}{x-1}$, dont le dénominateur étant égalé à zéro, donne $x=1$; les quantités $U=1$, et $\frac{dV}{dx}=\frac{d.(x^8+x^7-x^4-x^3)}{dx}$, deviennent 1 et 8 : on a donc (155) $A=\frac{1}{8}$, et pour la première fraction partielle $\frac{1}{8}.\frac{1}{x-1}$.

Au facteur $(x+1)^2$ répondent deux fractions partielles de la forme $\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{A_1}{x+1}$ (156) ; ayant trouvé immédiatement que

$$Q=\frac{x^8+x^7-x^4-x^3}{(x+1)^2}=x^6-x^5+x^4-x^3,$$

je fais $x+1=0$, d'où $x=-1$, $q=4$, et $\frac{u}{q}=\frac{1}{4}$; ainsi la seconde fraction partielle est $\frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2}$.

Mettant dans l'expression U_1, du n° cité, au lieu de A sa valeur $\frac{1}{4}$, j'ai

$$U_1=\frac{U-AQ}{x+1}=\frac{4-x^6+x^5-x^4+x^3}{4(x-1)}$$
$$=\frac{-x^5+2x^4-3x^3+4x^2-4x+4}{4},$$

d'où il vient $\frac{u_1}{q}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$; on a donc pour la troisième fraction partielle $\frac{9}{8}\frac{1}{x+1}$.

Pour appliquer ici le calcul différentiel, on formerait (156) l'équation

$$1 = Q[A + A_1(x+1)] + P(x+1)^2,$$

qu'il suffirait de différentier une fois; et posant ensuite $x = -1$, il viendrait

$$1 = AQ$$
$$0 = AdQ + A_1 Q dx.$$

Q étant $x^6 - x^5 + x^4 - x^3$, la première de ces équations donnerait $A = \frac{1}{4}$, et la seconde $A_1 = \frac{9}{8}$.

Le facteur x^3 fournit les trois fractions partielles

$$\frac{A}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x},$$

qu'on détermine au moyen de l'équation

$$1 = Q[A + A_1 x + A_2 x^2] + Px^3,$$

et de ses différentielles première et seconde. En observant que $Q = x^5 + x^4 - x - 1$, et faisant $x = 1$, dans Q, dQ et d^2Q, on trouve

$$A = -1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = -1:$$

on a donc $-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Il ne reste plus à trouver que la fraction partielle correspondante au facteur $x^2 + 1$, et dont la forme est $\frac{Ax+B}{x^2+1}$. On pourrait la conclure en retranchant de la proposée toutes les précédentes; mais je vais y parvenir directement par les formules du n° 157. On a d'abord $Q = x^6 + x^5 - x^4 - x^3$; puis le facteur $x^2 + 1$, étant égalé à zéro, donne

$x=\pm\sqrt{-1}$, $\alpha=0$, $\beta=1$, d'où on tire
$q\pm q'\sqrt{-1}=-2\pm2\sqrt{-1}$, $u=1$, et $u=0$:
les équations qui déterminent A et B, deviennent

$$1+2A+2B=0,\qquad 2A-2B=0;$$

et on trouve parconséquent $A=B=-\frac{1}{4}$.

Voilà donc la fraction proposée $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$, décomposée dans les suivantes:

$$\frac{1}{8}\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{9}{8}\frac{dx}{x+1}$$
$$-\frac{dx}{x^3}+\frac{dx}{x^2}-\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\frac{(x+1)dx}{x^2+1}.$$

L'intégration de chacune de celles-ci ne présente aucune difficulté, et on obtiendra pour le résultat

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{8}\mathrm{l}(x-1)-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\\ +\frac{9}{8}\mathrm{l}(x+1)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-\mathrm{l}x\\ -\frac{1}{8}\mathrm{l}(x^2+1)-\frac{1}{4}\mathrm{arc}(\mathrm{tang}=x)+const.\end{array}\right\}.$$

La réunion de tous les termes algébriques produira la fraction $\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}$, et celle des termes logarithmiques donnera

$$\tfrac{1}{8}\mathrm{l}(x-1)+\tfrac{1}{8}\mathrm{l}(x+1)+\mathrm{l}(x+1)-\tfrac{1}{8}\mathrm{l}(x^2+1)-\mathrm{l}x$$
$$=\tfrac{1}{8}\mathrm{l}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+\mathrm{l}\left(\frac{x+1}{x}\right);$$

on aura donc

$$\int\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}=\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}+\frac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$
$$+l\left(\frac{x+1}{x}\right)-\tfrac{1}{4}\,\text{arc}\,(\text{tang}=x)+\textit{const.}$$

De l'intégration des fonctions irrationnelles.

160. Les fonctions irrationnelles doivent être regardées comme intégrées, toutes les fois que, par quelque transformation, on les a rendues rationnelles, ou du moins lorsqu'on les a ramenées à une suite de monomes irrationnels; car alors on peut y appliquer immédiatement les règles précédentes.

Soit pour exemple $\frac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})dx}{1+\sqrt[3]{x}}$: il est évident qu'en faisant $x=z^6$, toutes les extractions indiquées s'effectuent, et on a $\frac{6z^5dz(1+z^3-z^4)}{1+z^2}$; divisant par $1+z^2$, il vient

$$-6\left[z^7dz-z^6dz-z^5dz+z^4dz-z^2dz+dz-\frac{dz}{1+z^2}\right],$$

dont l'intégrale est

$$-6\left[\frac{z^8}{8}-\frac{z^7}{7}-\frac{z^6}{6}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}+z-\text{arc}\,(\text{tang}=z)\right]+\textit{const.}$$

et remettant pour z la valeur $\sqrt[6]{x}$, on aura

$$-\tfrac{6}{8}x\sqrt[6]{x^2}+\tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,\text{arc}(\text{tang}$$
$$=\sqrt[6]{x})+\textit{const.}$$

161. La première espèce de fonctions irrationnelles dont je vais m'occuper, est celle qui ne renferme que le radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, et qui ne saurait avoir que l'une ou l'autre des formes $Xdx\sqrt{A+Bx+Cx^2}$ et $\frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, X étant une fonction rationnelle de x. Il faut d'abord remarquer que l'une de ces formes rentre dans l'autre; car on peut écrire la première ainsi qu'il suit :

$$Xdx\frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2}\times\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$$
$$=\frac{X(A+Bx+Cx^2)dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

et le numérateur du résultat est alors une fonction rationnelle.

Avant d'indiquer les moyens de rendre rationnelle, par rapport à x, l'expression $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, je mettrai la quantité $A+Bx+Cx^2$, sous la forme

$$C\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x+x^2\right);$$

et faisant pour abréger

$$C=\gamma^2,\quad \frac{A}{C}=\alpha,\quad \frac{B}{C}=\beta,$$

il en résultera $\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$.

Cela posé, si on prend $\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}=x+z$, en élevant au quarré, il viendra $\alpha+\beta x=2xz+z^2$, ce qui donnera $x=\frac{\alpha-z^2}{2z-\beta}$, d'où

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma(x+z)=\gamma\left(\frac{\alpha-\beta z+z^2}{2z-\beta}\right);$$

$$dx=-\frac{2(\alpha-\beta z+z^2)\,dz}{(2z-\beta)^2}.$$

Par le moyen de ces valeurs, on changera la différentielle $\frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$ en une autre de la forme Zdz, Z étant une fonction rationnelle de z, et réelle tant que C sera positif; mais si C était négatif, γ deviendrait imaginaire et la transformée pourrait le devenir aussi.

Dans ce cas, on aurait $\sqrt{A+Bx-Cx^2}$; et faisant

$$C=\gamma^2,\quad \frac{A}{C}=\alpha,\quad \frac{B}{C}=\beta,$$

il viendrait $\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}$. La quantité $x^2-\beta x-\alpha$, peut toujours se décomposer en facteurs réels du premier degré; si on les représente par $x-a$ et $x-a'$, il est évident que

$$\alpha+\beta x-x^2=-(x^2-\beta x-\alpha)=(x-a)(a'-x).$$

Faisant ensuite $\sqrt{(x-a)(a'-x)}=(x-a)z$, élevant au quarré les deux membres de cette équation, elle deviendra divisible par $x-a$, et on aura $a'-x=(x-a)z^2$, d'où on tirera

$$x=\frac{az^2+a'}{z^2+1},\ (x-a)z=\frac{(a'-a)z}{z^2+1},\ dx=\frac{2(a-a')zdz}{(z^2+1)},$$

valeurs qui rendront encore rationnelle la différentielle proposée.

162. Je prends d'abord pour exemple la différentielle

$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$; la première des transformations précédentes donnera $\frac{-2dz}{\gamma(2z-\beta)}$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{\gamma}\,l(2z-\beta)+const.$ Remettant pour z sa valeur $-x+\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}$, et pour α, β et γ les quantités qu'ils représentent, il viendra

$$-\frac{1}{\sqrt{C}}\,l\left[\frac{2}{\sqrt{C}}\left(-\frac{B}{2\sqrt{C}}-x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right)\right]$$
$$+const.$$

résultat auquel on peut donner la forme

$$-\frac{1}{\sqrt{C}}\,l\left[-\frac{B}{2\sqrt{C}}-x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right]+l\frac{2}{\sqrt{C}}$$
$$+const.$$

En réunissant les termes constans, et en observant que le radical $\sqrt{C}$ est susceptible du signe $\pm$, on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{C}}\,l\left[\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right]$$
$$+const.$$

163. Soit pour second exemple $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}$; en faisant usage de la dernière transformation du n° 161, on aura $\frac{-2dz}{\gamma(z^2+1)}$, dont l'intégrale est

$$-\frac{2}{\gamma}\,\text{arc}\,(\text{tang}=z)+const.$$

Substituant au lieu de z, sa valeur $\frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}$, tirée de

l'équation $a' - x = (x - a)z^2$,
et mettant $\sqrt{C}$ pour y, on obtiendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx - Cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{C}}.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{a' - x}}{\sqrt{x - a}}\right) + const.$$

a et a' étant les racines de l'équation

$$x^2 - \frac{B}{C}x - \frac{A}{C} = 0.$$

Si on prend $A = C = 1$, et $B = 0$, la différentielle proposée devient dans ce cas particulier $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, et la formule précédente donne pour son intégrale $-2.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x}}\right) + const.$ car a et a' étant alors les racines de $x^2 - 1 = 0$, il faut prendre $a = -1$ et $a' = 1$, pour ne pas tomber dans l'imaginaire.

Je vais montrer que ce résultat revient à l'arc dont le sinus $= x$, et dont on sait que $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, exprime la différentielle (35). Pour cela, je rappellerai que (*Trig.* 26),

$$\text{tang}\, 2A = \frac{2\,\text{tang}\, A}{1 - \text{tang}\, A^2},$$

d'où il suit que l'arc double de celui qui est indiqué dans la formule précédente, a pour tangente $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$, et que parconséquent il est le complément de l'arc dont $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ serait la tangente et x le sinus. (*Trig.* 26).

Nommant donc s ce dernier, on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s - \frac{\pi}{2} + const.$$

et comprenant l'arc $-\frac{\pi}{2}$ dans la constante arbitraire, il viendra $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s + const.$

J'observerai qu'on peut ramener immédiatement la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = \frac{dx}{\gamma\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}}$, à celle d'un arc de cercle; car en faisant d'abord $x-\frac{\beta}{2}=z$, on aura $\frac{dz}{\gamma\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}\beta^2-z^2}}$; posant ensuite $\alpha+\frac{1}{4}\beta^2=g^2$ et $z=gu$, on trouvera $\frac{du}{\gamma\sqrt{1-u^2}}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{\gamma}.\text{arc}\,(\sin=u)+const.$

164. L'intégration de la formule $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ peut aussi s'effectuer par le moyen des logarithmes, et conduit alors à des expressions imaginaires du sinus et du cosinus, qui sont très-remarquables.

En comparant cette formule avec $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, on trouve $A=1$, $B=0$; $C=-1$; et l'intégrale générale devient (162)

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\,(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2})+const.$$

si l'on représente par z l'arc dont $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est la différentielle, on aura donc

$$z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\,(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}) + const.$$

Mais si l'on veut que cet arc soit nul en même temps que x, il faut supprimer la constante arbitraire ; car, en faisant $x = 0$, le second membre se réduit à cette constante, à cause que $l\,1 = 0$.

Cela posé, en observant que x étant le sinus de l'arc z, $\sqrt{1-x^2}$ en est le cosinus, l'équation ci-dessus deviendra

$$z\sqrt{-1} = l\,(\cos z + \sqrt{-1}\sin z);$$

et si l'on suppose z négatif, comme

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

on aura encore

$$-z\sqrt{-1} = l\,(\cos z - \sqrt{-1}\sin z);$$

résultat qui se réunit au précédent, dans l'équation

$$\pm z\sqrt{-1} = l\,(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) \text{ (*)}.$$

(*) L'expression $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ se change immédiatement en différentielle logarithmique, lorsqu'on multiplie son numérateur et son dénominateur par le facteur $x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}$. Il vient par cette opération,

$$dz = \frac{\frac{x\,dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}} + dx}{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{dx\sqrt{-1} - \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}};$$

Prenant dans chaque membre, au lieu des logarithmes, les nombres auxquels ils appartiennent, il viendra

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sqrt{-1}\,\sin z,$$

équation qui fournit les deux suivantes :

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\,\sin z,$$
$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\,\sin z.$$

Si l'on ajoute celles-ci, on en tirera

$$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2};$$

et en retranchant la seconde de la première, il en résultera,

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces expressions ne sont au fond que de purs symboles algébriques, qui représentent, sous une forme abrégée, les séries du n° 36, ainsi qu'on peut s'en assurer, en mettant pour les exponentielles, $e^{z\sqrt{-1}}$, $e^{-z\sqrt{-1}}$, leurs développemens, formés d'après la série du n° 25; mais ces symboles, quoiqu'on ne puisse leur assigner de valeur sous aucune forme finie, ne s'en prêtent pas moins au calcul avec la plus grande facilité, et manifestent toutes les propriétés dont jouissent les lignes trigonométriques qu'ils représentent.

---

et l'on voit bien alors que le numérateur de la seconde fraction est la différentielle de son dénominateur, ensorte qu'on en conclut comme ci-dessus,

$$z\sqrt{-1} = l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}).$$

En mettant nz au lieu de z dans l'équation

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sqrt{-1}\sin z,$$

elle devient

$$e^{\pm nz\sqrt{-1}} = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

Mais on a aussi

$$e^{\pm nz\sqrt{-1}} = (e^{\pm z\sqrt{-1}})^n = (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n;$$

donc

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

Cette dernière équation conduit à des conséquences très-importantes, que je développerai successivement, à mesure qu'il en sera besoin. Ici je m'arrêterai sur l'usage qu'on en peut faire pour découvrir les facteurs des binomes de la forme $x^n \mp a^n$, parceque cette recherche est nécessaire dans l'intégration des fractions rationnelles $\frac{x^m dx}{x^n \mp a^n}$.

165. La fonction $x^n \mp a^n$ se transforme en $a^n(y^n \mp 1)$, lorsqu'on fait $x = ay$; et pour en connaître les facteurs, il suffit de résoudre l'équation

$$y^n \mp 1 = 0,$$

qui revient à

$$y^n = \pm 1.$$

L'expression $y = \cos z + \sqrt{-1}\sin z$ satisfait à cette équation, par une détermination très-simple de l'arc z; car on a

$$y^n = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz + \sqrt{-1}\sin nz;$$

et comme, en désignant par π la demi-circonférence, et par m un nombre entier quelconque, il vient

$$\sin m\pi = 0, \qquad \cos m\pi = \pm 1,$$

selon que m est un nombre pair ou impair, on n'aura qu'à supposer $nz = m\pi$, pour obtenir $y^n = \pm 1$.

Afin de distinguer plus particulièrement le cas où m est pair, de celui où il est impair, on écrit pour le premier $2m$ au lieu de m, et pour le second $2m+1$; et on fait

$$nz = 2m\pi, \quad \text{et} \quad nz = (2m+1)\pi.$$

Dans la première hypothèse, il viendra

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n}, \quad \text{et} \quad y^n = +1,$$

et dans la seconde,

$$y = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}, \text{ et } y^n = -1.$$

Au moyen du nombre indéterminé m, chacune des expressions de y fournit toutes les valeurs dont cette quantité est susceptible; car on peut prendre successivement

$$m = 0, \quad m = 1, \quad m = 2, \quad m = 3, \quad \text{etc.}$$

La première formule donnera

$$y = \cos 0 . \pi = 1$$

$$y = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$y = \cos\frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n}$$

etc.

et

et il est visible qu'on trouvera toujours des résultats différens, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à $m=n-1$; car, en supposant $n=m$, on a $y=\cos 2\pi=1$, et on retombe sur la première des valeurs déjà obtenues, puisqu'en prenant $m=n+1$, il vient

$$\cos\frac{(2n+2)\pi}{n}=\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right)=\cos\frac{2\pi}{n}\,(\textit{Trig}.\ 22.)$$

$$\sin\frac{(2n+2)\pi}{n}=\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right)=\sin\frac{2\pi}{n}:$$

ce qui ramène à la deuxième valeur, et ainsi des autres.

La seconde expression générale de y, relative à l'équation $y^n+1=0$, ne donne de meme des valeurs différentes que depuis $m=0$, jusqu'à $m=n-1$ inclusivement; puisque si on prend $m=n$, il vient

$$\cos\frac{(2n+1)\pi}{n}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{n}\right)=\cos\frac{\pi}{n}$$

$$\sin\frac{(2n+1)\pi}{n}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{n}\right)=\sin\frac{\pi}{n}.$$

166. Non-seulement on trouvera par ce procédé, précisément les n racines de l'équation $y^n\mp 1=0$, mais on reconnaîtra, avec un peu d'attention, que ces racines peuvent s'arranger par couples, en réunissant celles qui ne diffèrent que par le signe du radical $\sqrt{-1}$. En effet, puisque

$$\cos(2\pi-p)=\cos p \quad\text{et}\quad \sin(2\pi-p)=-\sin p,$$

il en résulte que

$$y=\cos\frac{(n+q)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{(n+q)\pi}{n}$$
$$=\cos\frac{(n-q)\pi}{n}-\sqrt{-1}\sin\frac{(n-q)\pi}{n}.$$

Or il est facile de voir que les nombres $n+q$ et $n-q$ sont tous deux pairs ou impairs en même temps ; on peut donc, dans les expressions de y, rapportées ci-dessus, se borner aux multiples de π qui ne surpassent point $n\pi$, pourvu qu'on prenne le radical $\sqrt{-1}$ alternativement en $+$ et en $-$, et elles deviendront en conséquence,

$$y=\cos\frac{2m\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n},$$

$$y=\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\frac{(2m+1)\pi}{n}.$$

Lorsque n est paire, les valeurs de m dans la première doivent être tous les nombres entiers depuis o jusqu'à $\frac{n}{2}$ inclusivement, et seulement jusqu'à $\frac{n-2}{2}$ dans la seconde ; et quand n est impaire, l'une et l'autre doivent être poussées jusqu'à $\frac{n-1}{2}$.

Les deux valeurs comprises dans la formule

$$y=\cos\frac{2m\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n}$$

donnent pour facteurs du premier degré de la quantité y^n-1, les deux expressions imaginaires

$$\left(y-\cos\frac{2m\pi}{n}\right)-\sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n}$$

$$\left(y-\cos\frac{2m\pi}{n}\right)+\sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n};$$

et en les multipliant, on obtient l'expression

$$y^2-2y\cos\frac{2m\pi}{n}+1,$$

qui comprend tous les facteurs réels du second degré.

On trouve de même que les facteurs du second degré de la quantité $y^n + 1$ sont

$$y^2 - 2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + 1.$$

167. Voici pour servir d'exemple de la formule

$$y = \cos\frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n},$$

le tableau des facteurs du premier degré contenus dans la fonction $y^6 - 1$

$$y - 1$$
$$y - \left(\cos\frac{2\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{6}\right)$$
$$y - \left(\cos\frac{4\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{6}\right)$$
$$y + 1$$

La formule

$$y^2 - 2y\cos\frac{2m\pi}{n} + 1$$

donne les facteurs du second degré

$$y^2 - 2y + 1$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{2\pi}{6} + 1$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{4\pi}{6} + 1$$
$$y^2 + 2y + 1.$$

Le premier et le dernier des facteurs du second degré sont les quarrés des facteurs du premier degré $y - 1$ et $y + 1$, qui n'entrent qu'une fois dans la proposée ; il faudra donc, lorsqu'on emploiera les facteurs du se-

cond degré, remplacer le premier et le dernier par

$$(y-1)(y+1) \text{ ou } y^2-1.$$

On a pour la fonction y^5-1 les facteurs du premier degré

$$y-1$$
$$y-\left(\cos\frac{2\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$y-\left(\cos\frac{4\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}\right).$$

Ceux du second degré sont

$$y^2-2y+1$$
$$y^2-2y\cos\frac{2\pi}{5}+1$$
$$y^2-2y\cos\frac{4\pi}{5}+1;$$

mais il faut encore observer que le premier facteur du second degré est le quarré du facteur $y-1$, qui n'entre qu'une fois dans la fonction proposée.

Par la formule

$$y=\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n},$$

les facteurs du premier degré de y^5+1, sont

$$y-\left(\cos\frac{\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{5}\right)$$
$$y-\left(\cos\frac{3\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{5}\right)$$
$$y+1;$$

et la formule $y^2-\frac{(2m+1)\pi}{n}+1$ conduit à

$$y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{5} + 1$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{3\pi}{5} + 1,$$
$$y^2 + 2y + 1.$$

La fonction $y^6 + 1$ a pour facteurs du premier degré

$$y - \left(\cos\frac{\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$y - \left(\cos\frac{3\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{6}\right) \text{ ou } y \mp \sqrt{-1}$$
$$y - \left(\cos\frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

et pour facteurs du second,

$$y^2 - 2y\cos\frac{\pi}{6} + 1$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{3\pi}{6} + 1 \text{ ou } y^2 + 1$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{5\pi}{6} + 1.$$

168. Les fonctions de la forme $x^{2n} - 2px^n + q$ peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes. En les résolvant à la manière des équations du second degré, on en tirera les facteurs

$$x^n - (p \pm \sqrt{p^2 - q}),$$

qui seront réels, tant que p^2 surpassera q; et en faisant alors

$$\pm a^n = p \pm \sqrt{p^2 - q},$$

il viendra des fonctions de la forme

$$x^n \mp a^n$$

à décomposer en facteurs.

Lorsqu'on aura $p^2 < q$, on fera $p = \alpha^n$, $q = \beta^{2n}$, $x = \beta y$, et il viendra

$$\beta^{2n}y^{2n} - 2\alpha^n\beta^n y^n + \beta^{2n} = \beta^{2n}\left(y^{2n} - \frac{2\alpha^n}{\beta^n}y^n + 1\right);$$

mais la condition $p^2 < q$ ou $\alpha^{2n} < \beta^{2n}$ donnant $\alpha^n < \beta^n$, la quantité $\frac{\alpha^n}{\beta^n}$ sera une fraction, et p pourra être représentée par le cosinus d'un arc donné δ ; la fonction proposée reviendra donc à

$$\beta^{2n}\left(y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1\right),$$

et il ne s'agira plus que de résoudre l'équation

$$y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1 = 0.$$

On en tire d'abord

$$y^n = \cos\delta \pm \sqrt{-1}\sin\delta;$$

puis prenant

$$y = \cos z \pm \sqrt{-1}\sin z,$$

il vient (164)

$$y^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

et en comparant avec l'autre valeur de y^n, on obtient

$$\cos nz = \cos\delta, \qquad \sin nz = \sin\delta.$$

On satisfait en général à ces relations, en supposant $nz = 2m\pi + \delta$, m étant un nombre entier quelconque, puisque

$$\cos(2m\pi + \delta) = \cos\delta, \qquad \sin(2m\pi + \delta) = \sin\delta;$$

on aura donc

$$z = \frac{2m\pi + \delta}{n}, y = \cos\frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi + \delta}{n};$$

et les facteurs du premier degré de la fonction

$$y^{2n} - 2y^n \cos\delta + 1$$

seront parconséquent compris dans la formule

$$y = \left\{\cos\frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi + \delta}{n}\right\}.$$

Si on avait $x^{2n} + 2px^n + q = 0$, on ferait encore $\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \cos\delta$; mais on prendrait

$$y^n - 2y^n\cos(\pi - \delta) + 1.$$

puisque $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$. Cela fait, il viendrait

$$\cos nz = \cos(\pi - \delta), \quad \sin nz = \sin(\pi - \delta);$$

et parconséquent

$$nz = 2m\pi + \pi - \delta = (2m + 1)\pi - \delta \text{ (*)}.$$

De l'intégration des différentielles binomes.

169. Ces différentielles sont représentées par la formule

$$x^{m-1}dx\,(a + bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

dont on ne diminue point la généralité, en supposant que m et n sont des nombres entiers.

Si on avait, par exemple, $x^{\frac{1}{3}}dx(a + bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}}$, on ferait

(*) Les formules des n°s 166, 167, 168, contiennent implicitement les théorêmes de *Côtes* et de *Moivre*, et remplacent avec avantage ces théorêmes, qui ne sont plus maintenant qu'un objet de pure curiosité; je n'ai pas cru par cette raison devoir les insérer ici: on les trouve dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral.*

$x=z^6$, d'où il résulterait $6z^7dz(a+bz^3)^{\frac{p}{q}}$. On peut aussi regarder n comme essentiellement positive, parce-que dans le cas où on aurait $x^{m-1}dx(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}$, on supposerait $x=\frac{1}{z}$, et il viendrait $-z^{-m-1}dz(a+bz^n)^{\frac{p}{q}}$.

Pour chercher dans quel cas $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, peut devenir rationnelle, on fait $a+bx^n=z^q$, ensorte que $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=z^p$; puis on trouve

$$x^n=\frac{z^q-a}{b},\ x^m=\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},\ x^{m-1}dx=\frac{q}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}dz;$$

et la différentielle proposée devenant par là

$$\frac{q}{nb}z^{p+q-1}dz\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1};$$

on voit alors qu'elle sera rationnelle toutes les fois que $\frac{m}{n}$ sera un nombre entier.

L'expression $x^8dx(a+bx^3)^{\frac{p}{q}}$ satisfait à cette condition, puisque $m=9$; $n=3$, $\frac{m}{n}=3$, et se transforme en

$$\frac{q}{3b}z^{p+q-1}dz\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^2.$$

L'expression $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ est susceptible d'une autre forme, en rendant négatif l'exposant de x dans

la parenthèse, ou en divisant par x^n la quantité $a+bx^n$: il vient ainsi

$$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=x^{m-1}dx[(ax^{-n}+b)x^n]^{\frac{p}{q}}$$

$$=x^{m-1}dx(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}x^{\frac{np}{q}}$$

$$=x^{m+\frac{np}{q}-1}dx(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}};$$

et d'après le calcul précédent, la dernière de ces expressions peut être rendue rationnelle, lorsque $\dfrac{m+\frac{np}{q}}{n}$ est un nombre entier, ou, ce qui revient au même, lorsque $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ en est un.

La différentielle

$$x^4dx(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}$$

est dans ce cas, puisqu'alors

$$\frac{m}{n}=\frac{5}{3},\ \frac{p}{q}=\frac{1}{3},\ \frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{6}{3}=2.$$

En appliquant à la différentielle

$$x^{m+\frac{np}{q}-1}dx(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}},$$

la substitution indiquée pour la première forme de cette différentielle, on fera

$$ax^{-n}+b=z^q,$$

d'où on tirera

$$a+bx^n=x^nz^q;$$

et si l'on transforme immédiatement l'expression $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ par le moyen de l'équation précédente, on obtiendra évidemment le même résultat que si on lui avait d'abord donné la forme

$$x^{m+\frac{np}{q}-1}dx(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}.$$

170. Puisqu'il n'est pas possible d'intégrer en général la formule $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, l'idée qui se présente d'abord, est de chercher à la réduire aux cas les plus simples qu'elle peut renfermer, comme on l'a vu n° 154, à l'égard de $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^q}$, qui se ramène à $\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}$. On y parviendra par la remarque du n° 148, en vertu de laquelle on a $\int udv=uv-\int vdu$; car si on décompose la quantité $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en deux facteurs, dont l'un pouvant s'intégrer, soit représenté par dv, et l'autre par u, on fera dépendre l'intégration de la formule proposée de celle de $\int vdu$, qui, dans certains cas, sera plus simple que la proposée, ainsi qu'on va le voir. Ce procédé, très-fécond et très-remarquable, s'appelle *Intégration par parties.*

Pour abréger un peu les résultats, j'écrirai p au lieu de $\frac{p}{q}$; et il faudra supposer que p est un nombre fractionnaire quelconque : on aura alors la formule

$$x^{m-1}dx(a+bx^n)^p.$$

Parmi les diverses manières de décomposer cette différentielle en facteurs, je choisis celle qui tend à

diminuer l'exposant de x hors de la parenthèse, et qui s'opère en écrivant ainsi,

$$\int x^{m-n}.x^{n-1}dx(a+bx^n)^p$$

la formule proposée. Par ce moyen, le facteur $x^{n-1}dx(a+bx^n)^p$ est intégrable, quel que soit p (149): en le représentant par dv, on a

$$v=\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}, \quad \text{et} \quad u=x^{m-n};$$

d'où il résulte

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=$$
$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}-\frac{m-n}{(p+1)nb}\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{p+1};$$

or

$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{p+1}=$$
$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p(a+bx^n)=$$
$$a\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p+b\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p;$$

mettant cette dernière valeur dans l'équation précédente, et rassemblant les termes affectés de l'intégrale $\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p$, il vient

$$\left(1+\frac{m-n}{(p+1)n}\right)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=$$
$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-a(m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{(p+1)nb};$$

d'où on tire (*A*)............ $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=$

$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-a(m-n)\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p}{b(pn+m)}.$$

Il est aisé de voir que puisqu'on peut ramener, par cette formule, l'intégration de $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ à celle de $\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p$, on ramènera aussi

cette dernière à celle de $\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^p$, en écrivant $m-n$ à la place de m dans l'équation(A); puis, changeant encore m en $m-2n$ dans cette même équation, elle fera connaître $\int x^{m-2n-1}dx(a+bx^n)^p$, au moyen de $\int x^{m-3n-1}dx(a+bx^n)^p$, et ainsi de suite.

En général, si r désigne le nombre de réductions effectuées, on parviendra à $\int x^{m-rn-1}dx(a+bx^n)^p$, et la dernière formule sera

$$\int x^{m-(r-1)n-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-rn}(a+bx^n)^{p-1}-a(m-rn)\int x^{m-rn-1}dx(a+bx^n)^p}{b(pn+m-(r-1)n)}.$$

Il est évident, par cette dernière formule, que si m est un multiple de n, l'intégration de la formule $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ s'effectuera algébriquement, puisque l'anéantissement du coefficient $m-rn$ qui aura nécessairement lieu, fera disparaître la dernière intégrale $\int x^{m-rn}dx(a+bx^n)^p$. Ce résultat s'accorde avec celui du n° 169.

171. On peut obtenir aussi une réduction par laquelle l'exposant de la parenthèse soit diminué de l'unité; pour cela il suffit d'observer que

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)$$
$$= a\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1} + b\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1},$$

et que la formule (A), en y changeant m en $m+n$, et p en $p-1$, donne

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^p - am\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{b(pn+m)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente,

on aura (B) .... $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$

$$\frac{x^m(a+bx^n)^p + pna\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}}{(pn+m)}.$$

Avec la formule (B), on ôtera successivement du nombre p toutes les unités qu'il peut contenir ; et par le moyen de cette formule et de la formule (A), on fera dépendre l'intégrale

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p \quad \text{de} \quad \int x^{m-rn-1}dx(a+bx^n)^{p-s},$$

rn étant le plus grand multiple de n contenu dans $m-1$, et s le plus grand nombre entier contenu dans p.

L'intégrale $\int x^7dx(a+bx^3)^{\frac{7}{2}}$, par exemple, sera ramenée successivement, par la formule (A), à

$$\int x^4dx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}, \quad \int xdx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}};$$

et la formule (B) fera dépendre $\int xdx(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}$ de

$$\int xdx(a+bx^3)^{\frac{3}{2}} \text{ et celle-ci de } \int xdx(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}.$$

172. Il est évident que si m et n étaient négatives, les for u les (A) et (B) ne rempliraient pas le but pour lequel elles ont été construites : elles augmenteraient alors les exposans de x hors de la parenthèse, et celui de la parenthèse ; mais en les renversant, on en trouve qui s'appliquent aux cas dont il s'agit.

On tire de (A)

$$\int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p =$$

$$\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - b(m+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p}{a(m-n)};$$

et mettant $m+n$ au lieu de m, il vient (C)

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$$
$$\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1} - b(m+n+np)\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^p}{am},$$

formule qui diminue les exposans hors la parenthèse, puisque $m+n-1$ devient $-m+n-1$, quand on a mis $-m$ à la place de m.

Pour renverser la formule (B), on prend

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1} =$$
$$-\frac{x^m(a+bx^n)^p - (m+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p}{pna};$$

puis on écrit $p+1$ au lieu de p, et il vient (D)

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p =$$
$$-\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1} - (m+n+np)\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)na}.$$

Cette formule atteint le but proposé, puisque $p+1$ se change en $-p+1$, lorsque p est négatif.

Les formules (A), (B), (C), (D), deviennent illusoires, lorsque leur dénominateur s'évanouit. Cela arrive pour la formule (A), par exemple, quand $m=-np$: mais dans tous les cas de cette espèce, la fonction proposée est intégrable soit algébriquement, soit par logarithmes.

173. Soit la formule $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, m étant un nombre entier positif; on trouve par la formule (A), en y faisant $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$,

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m-3}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

écrivant m au lieu de $m-1$, il vient

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En donnant successivement à m différentes valeurs, en commençant par les nombres impairs, on aura

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+const.$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{7}x^6\sqrt{1-x^2}+\frac{6}{7}\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

On tirera de là

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+const.$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{1-x^2}+const.$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{1.4}{3.5}x^2+\frac{1.2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{1-x^2}+const.$$

$$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{7}x^6+\frac{1.6}{3.7}x^4+\frac{1.4.6}{3.5.7}x^2+\frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right)\sqrt{1-x^2}+const.$$

etc.

la loi de ces valeurs est évidente.

Passant aux valeurs paires de m, et supposant $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc. on trouve

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{4}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{6}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

dans ce cas toutes les intégrales proposées dépendront de

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc}\,(\sin=x)+const.\ (35),$$

et en représentant par A l'arc indiqué, on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=A+const.$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}A+const.$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1.3}{2.4}A.+const.$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.5}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}A+const.$$

etc.

174. Je vais chercher maintenant les formules qui répondent aux cas où m est négative. On a alors par la formule (C) (172)

$\int$

$$\int \frac{x^{-m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{-m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

en écrivant $-m$, au lieu de $-m-1$, il vient

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}.$$

On ne peut pas supposer $m=1$, puisque cette valeur rend le dénominateur nul; il faut donc chercher *à priori* l'intégrale de $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. On la trouvera facilement d'après ce qui a été dit nº 161; mais on peut y parvenir aussi de la manière suivante: on fera $1-x^2=z^2$; d'où il résultera

$$x=\sqrt{1-z^2} \qquad dx=\frac{-zdz}{\sqrt{1-z^2}},$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{-dz}{1-z^2},$$

équation dont le second membre a pour intégrale

$$-\tfrac{1}{2}l(1+z)+\tfrac{1}{2}l(1-z)=-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

remettant au lieu de z sa valeur, on aura

$$-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right);$$

multipliant par $1+\sqrt{1-x^2}$, les deux termes de la fraction comprise sous le signe l, on obtiendra

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left[\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^2}\right]=-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left[\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2\right]$$
$$=-\mathrm{l}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right);$$

on aura donc enfin

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\mathrm{l}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+const.$$

En posant $m=3$, $m=5$, etc. il viendra

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$
$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$$
$$\int\frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^6}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

Faisant ensuite $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc. on trouvera

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+const.$$
$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$
$$\int\frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$$

etc.

De ces deux suites d'équations on tirera, comme dans le n° précédent, une classe de formules intégrées par logarithmes, et une autre classe qui sera algébrique.

De l'intégration par les séries.

175. L'intégrale $\int X dx$ s'obtient facilement lorsqu'on a développé la fonction X en série, parcequ'on n'a plus à intégrer que des monomes auxquels s'applique immédiatement la règle du n° 146. En effet, soit $X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{etc.}$; si on multiplie les deux membres de cette équation par dx, et qu'on intègre séparément chaque terme du second, il viendra

$$\int X dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{etc.} + const.$$

Lorsqu'on rencontrera dans le développement de x un terme de la forme $\frac{A}{x}$, il en résultera dans l'intégrale, le terme $A \, l x$ (147).

176. La fonction la plus simple qu'on puisse réduire en série, est $\frac{1}{a+x}$, et il en résulte

$$\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.};$$

d'où

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} + const.$$

mais on sait d'ailleurs que $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$: on aura donc

$$l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} + const.$$

Pour trouver ce qu'exprime la constante, il n'y a qu'à faire $x = 0$, on aura dans cette supposition $la = const.$

R 2

et parconséquent,

$$\mathrm{l}(a+x)-\mathrm{l}a=\mathrm{l}\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{etc.}$$

résultat conforme à celui du n° 29.

Soit la différentielle $\frac{a\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$, qui peut se mettre sous la forme $\frac{\frac{\mathrm{d}x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}$, et qui appartient parconséquent à l'arc dont la tangente $=\frac{x}{a}$: en réduisant $\frac{a}{a^2+x^2}$ en série, il viendra

$$\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}+\text{etc.};$$

intégrant chaque terme en particulier, on aura

$$\int\frac{a\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{a}\right)+\textit{const.}=$$
$$\frac{x}{a}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}-\frac{x^7}{7a^7}+\text{etc.}+\textit{const.}$$

Si on veut tirer de cette équation la valeur du plus petit des arcs dont la tangente est $\frac{x}{a}$, il faudra supprimer la constante arbitraire, puisque l'arc cherché est nul, lorsque $x=0$, et on aura

$$\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}-\frac{x^7}{7a^7}+\text{etc.}$$

résultat conforme à celui du n° 37; mais ici la loi est évidente.

En opérant de même sur $\frac{x^m\mathrm{d}x}{a^n+x^n}$, on trouve

$$\int\frac{x^m dx}{a^n+x^n}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n}-\frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}}$$
$$+\frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}}-\text{etc.}+const.$$

177. L'objet de l'intégration par les séries étant de se procurer des valeurs approchées des intégrales qu'on ne peut obtenir rigoureusement, il est important d'avoir plusieurs séries pour exprimer la même intégrale, afin de choisir celle que rend convergente la valeur particulière qu'on se propose de donner à x. Les séries qui procèdent suivant les puissances positives de x, dont les exposans vont en croissant, où *les séries ascendantes,* ne convergent en général que dans le cas où la variable x demeure très-petite; tandis que celles qui procèdent par des puissances négatives de x, où les *séries descendantes*, le font dans les cas où cette variable est très-grande.

Pour parvenir à une série de cette espèce, dans l'exemple ci-dessus, il faudrait changer l'ordre des termes du binome a^n+x^n, ou mettre x à la place de a dans le développement de $\frac{1}{a^n+x^n}$, et on aurait

$$\frac{1}{x^n+a^n}=\frac{1}{x^n}-\frac{a^n}{x^{2n}}+\frac{a^{2n}}{x^{3n}}-\frac{a^{3n}}{x^{4n}}+\text{etc.}$$

et il viendrait, après avoir multiplié par $x^m dx$ et intégré,

$$\int\frac{x^m dx}{x^n+a^n}=-\frac{1}{(n-m-1)x^{n-m-1}}$$
$$+\frac{a^n}{(2n-m-1)x^{2n-m-1}}-\frac{a^{2n}}{(3n-m-1)x^{3n-m-1}}$$
$$+\text{etc.}+const.$$

Cette série deviendrait illusoire, si quelqu'un de ses dé-

nominateurs, compris dans la forme $in-m-1$, s'évanouissait, ce qui arriverait si $m+1$ était un multiple de n; dans ce cas la différentielle développée contiendrait un terme de la forme $a^{(i-1)n}\frac{dx}{x}$, dont l'intégrale serait $a^{(i-1)n}lx$.

Si on fait dans le résultat ci-dessus $m=0$, $n=2$ et $a=1$, il devient

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{etc.}+const.$$

mais quoique l'expression $\frac{dx}{1+x^2}$, soit la différentielle de l'arc dont la tangente est x, il n'en faut pas conclure que la série précédente soit le développement de cet arc, puisqu'elle devient infinie lorsque $x=0$. La considération de la constante arbitraire levera cette difficulté, si l'on fait attention que pour connaître la vraie valeur d'une série, il faut toujours partir du cas où elle est convergente. Or la série

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{etc.}$$

l'est d'autant plus, que x est plus grand, et elle s'évanouit lorsque x est infini; l'équation

$$\text{arc}(\text{tang}=x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{etc.}+const.$$

se changera dans cette limite en arc de $1^q=\frac{\pi}{2}=const.$ substituant cette valeur de la constante, on aura

$$\text{arc}(\text{tang}=x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\text{etc.}$$

On pourrait intégrer aussi la fraction rationnelle $\frac{Udx}{V}$ (151), en développant en série l'expression $\frac{U}{V}$;

mais ce moyen ne conduirait qu'à des résultats fort compliqués et rarement convergens ; d'ailleurs ces calculs sont à peu près inutiles, puisqu'on sait ramener cette différentielle aux logarithmes et aux arcs de cercles, faciles à évaluer par les tables qu'on en a.

178. La formule $\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ est facile à intégrer par le développement de la quantité $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ en série, et il vient pour résultat

$$\int x^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{x^m}{m} + \frac{pb}{qa}\frac{x^{m+n}}{m+n}\right.$$
$$\left. + \frac{p(p-q)b^2}{1.2q^2a^2}\frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \frac{p(p-q)(p-2q)b^3}{1.2.3q^3a^3}\frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ const.$$

Si on voulait avoir une série descendante par rapport à x, il faudrait donner à la différentielle proposée la forme $x^{m+\frac{np}{q}-1}dx\,(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$; et on trouverait, après avoir développé $(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, multiplié le résultat par $x^{m+\frac{pn}{q}-1}dx$ et intégré, ...

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{p}{q}}\left\{\frac{qx^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np}\right.$$
$$\left. + \frac{pa}{qb}\frac{qx^{m+\frac{(p-q)n}{q}}}{mq+(p-q)n} + \frac{p(p-q)a^2}{1.2.q^2b^2}\frac{qx^{m+\frac{(p-2q)n}{q}}}{mq+(p-2q)n} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ const.$$

Tant que les quantités a et b seront positives toutes deux, ou que q sera un nombre impair, on pourra se servir indifféremment de cette série ou de la pré-

cédente ; mais lorsque q sera pair, la première formule deviendra imaginaire par le facteur $a^{\frac{p}{q}}$, si a^p est négatif, et la même chose arrivera à la seconde, si b^p est négatif.

179. Soit $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, expression qui est la différentielle de l'arc dont le sinus $=x$; on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8+\text{etc.}$$

et de là

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\text{etc.}+const.$$

En supprimant la constante, la série s'anéantira, lorsque $x=0$; elle donnera parconséquent la valeur du plus petit des arcs dont le sinus $=x$, comme dans le n° 37.

Voici encore quelques résultats faciles à obtenir, d'après ce qui précède, mais qu'il est bon de connaître.

1°. $\frac{dx}{\sqrt{x-xx}}=\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}$; faisant $\sqrt{x}=u$, on a $\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$; mais par la série précédente il vient

$$\int\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}=2\left(u+\frac{1}{2}\frac{u^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{u^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{u^7}{7}+\text{etc.}\right)+const.$$

donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-xx}}=2\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{7}+\text{etc.}\right)\sqrt{x}+const.$$

2°. $dx\sqrt{2ax-x^2}=(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$;

or

$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\frac{x}{2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{4a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{8a^3}-\text{etc.}$$

donc

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7.4a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)\sqrt{2a}+\textit{const.},$$

ou $$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{x}{5.2a}-\frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{7.4a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{9.8a^3}-\text{etc.}\right)2x\sqrt{2ax}+\textit{const.}$$

3°. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ donne, après la réduction de $\sqrt{1+x^2}$ en série, et l'intégration,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\text{etc.}$$
$$+\textit{const.}$$

4°. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=lx-\frac{1}{1.2x^2}-\frac{1.3}{2.4.4x^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6.6x^6}$$
$$-\text{etc.}+\textit{const.}$$

Cette série, qui renferme la transcendante lx, est d'autant plus convergente que x est grand ; on peut en obtenir une autre entièrement algébrique, et d'autant plus convergente que x diffère moins de l'unité. Pour

cela, il faut faire $x = 1 + u$, ce qui donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int u^{-\frac{1}{2}} du \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

développant $\left(1 + \frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, multipliant chaque terme par $u^{-\frac{1}{2}}du$, et intégrant, on trouve

$$\int \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3.2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7.8} + \text{etc.}\right) + const.$$

$$= \left(1 - \frac{1.u}{2.3.2} + \frac{1.3.u^2}{2.4.5.4} - \frac{1.3.5.u^3}{2.4.6.7.8} + \text{etc.}\right)\sqrt{2u} + const.$$

et puisque $u = x - 1$, les termes de cette série sont d'autant plus petits que $x - 1$ est peu considérable.

180. Le but de la réduction des différentielles en série, est de les transformer dans une suite de termes dont chacun soit intégrable en particulier, et il n'est pas nécessaire pour cela que les termes soient des monomes.

Si on a, par exemple,

$$\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

et que e soit une quantité fort petite, on peut développer $\sqrt{1-e^2x^2}$ dans une série très-convergente, parce-que dans la différentielle proposée x^2 est toujours < 1, à cause du radical $\sqrt{1-x^2}$; on trouve

$$\sqrt{1-e^2x^2}=1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1.1}{2.4}e^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6-\text{etc.}$$

et il vient à intégrer la suite

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1}{2}e^2x^2-\frac{1.1}{2.4}e^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6-\text{etc.}\right)$$

dont chaque terme rentre dans la formule $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, traitée nos 173, 174. En substituant au lieu de

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{etc.}$$

les expressions données dans le n° 173, il en résultera

$$\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=A$$
$$+\frac{1}{2}e^2\left\{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}A\right\}$$
$$+\frac{1.1}{2.4}e^4\left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1.3}{2.4}A\right\}$$
$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\left\{\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.5}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}A\right\}$$
$$+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\textit{const.}$$

On traiterait d'une manière analogue la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a+x)}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+x}}:$$

on réduirait en série la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{a+x}}=(a+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il est bon de remarquer que la formule

$$\frac{du}{\sqrt{(2mu-u^2)(n-u)}},$$

qui se rencontre dans quelques applications à la mécanique, se ramène à

$$\frac{-1}{\sqrt{m}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a+x)}},$$

en faisant

$$m-u=mx \quad \text{et} \quad \frac{n-m}{m}=a.$$

De l'intégration des quantités logarithmiques et exponentielles.

181. Soit d'abord la formule $\int Px(lx)^n$, P étant une fonction algébrique de x; en y appliquant la réduction que donne la formule $\int udv=uv-\int vdu$, et faisant pour abréger $\int Pdx=N$, il vient

$$\int Pdx(lx)^n=N(lx)^n-n\int\frac{dx}{x}(lx)^{n-1}N.$$

Si on désigne $\int\frac{dx}{x}N$ par M, et qu'on change N en M et n en $n-1$, dans la formule précédente, on aura

$$\int\frac{dx}{x}N(lx)^{n-1}=M(lx)^{n-1}-(n-1)\int\frac{dx}{x}(lx)^{n-2}M.$$

Par une suite de réductions semblables, on obtiendra...

$$\left.\begin{array}{r}\int Pdx(lx)^n=N(lx)^n-nM(lx)^{n-1}+n(n-1)L(lx)^{n-2}\\ -n(n-1)(n-2)K(lx)^{n-3}+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

et parconséquent l'intégrale proposée sera algébrique dans le cas où n sera un nombre entier, et où les quantités N, M, L, K, etc. seront toutes des fonctions algébriques; c'est ce que les exemples suivans vont éclaircir.

182. La différentielle $x^m dx\,(lx)$ donne

$$\int P dx = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = N,$$

et parconséquent

$$\int x^m dx\,(lx)^n = \frac{x^{m+1}(lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m dx\,(lx)^{n-1}.$$

Si dans cette équation on change successivement n en $n-1$, en $n-2$, etc., on trouvera

$$\int x^m dx\,(lx)^{n-1} = \frac{x^{m+1}(lx)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1}\int x^m dx\,(lx)^{n-2},$$

$$\int x^m dx\,(lx)^{n-2} = \frac{x^{m+1}(lx)^{n-2}}{m+1} - \frac{n-2}{m+1}\int x^m dx\,(lx)^{n-3},$$

etc.

En poursuivant ces réductions, puis remontant de la dernière à la première, on construira la formule générale suivante :

$$\int x^m dx (lx)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (lx)^n - \frac{n}{m+1}(lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(lx)^{n-2} \\ \quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3}(lx)^{n-3} + \text{etc.} \end{array} \right\} + const.$$

Il est visible que cette série se terminera toutes les fois que n sera un nombre entier positif.

En prenant $n = 1$ et $n = 2$, on trouve

$$\int x^m dx\,(lx) = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(lx) - \frac{1}{m+1}\right\} + const.$$

$$\int x^m dx (lx)^2 = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(lx)^2 - \frac{2}{m+1}(lx) + \frac{1}{(m+1)^2}\right\}.$$

Lorsque $m = -1$, on a

$$\int \frac{dx}{x}(lx)^n = \frac{1}{n+1}(lx)^{n+1} + const.$$

En général, la différentielle $\frac{dx}{x}U$, dans laquelle U désignerait une fonction algébrique de lx, deviendrait algébrique en faisant $lx = u$.

Lorsque n est négatif ou fractionnaire, la série se prolonge à l'infini; en faisant $n = -\frac{1}{2}$, par exemple, il vient

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{lx}} =$$

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{\frac{1}{(lx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)(lx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{4(m+1)^2(lx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5}{8(m+1)^3(lx)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.}\right\} + const.$$

183. Au lieu de se servir de la formule du n° précédent, dans laquelle l'exposant de lx augmente sans cesse, lorsque n est négatif, on peut, en opérant comme on va le voir, ramener l'intégration de la formule $\int P dx (lx)^{-n}$ à une autre de la forme $\int V dx (lx)^{-1}$, si n est un nombre entier, ou au moins de la forme $\int V dx (lx)^{-n+m}$, m étant le plus grand nombre entier contenu dans n.

La différentielle $P dx (lx)^{-n}$ peut être mise sous la forme $Px.\frac{dx}{x}(lx)^{-n}$; mais le facteur $\frac{dx}{x}(lx)^{-n}$ ayant

pour intégrale $\frac{-1}{(n-1)(\mathrm{l}x)^{n-1}}$, il viendra

$$\int \frac{P\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^n} = -\frac{Px}{(n-1)(\mathrm{l}x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{(\mathrm{l}x)^{n-1}}\,\mathrm{d}(Px).$$

Si on fait successivement

$\mathrm{d}(Px) = Q\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}(Qx) = R\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}(Rx) = S\mathrm{d}x$, etc.

puis qu'on change n en $n-1$, $n-2$, etc., on aura, en poursuivant la réduction ci-dessus,

$$\int \frac{P\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^n} = -\frac{Px}{(n-1)(\mathrm{l}x)^{n-1}} - \frac{Qx}{(n-1)(n-2)(\mathrm{l}x)^{n-2}} - \frac{Rx}{(n-1)(n-2)(n-3)(\mathrm{l}x)^{n-3}} - \text{etc.}$$

cette suite étant poussée jusqu'à ce qu'on rencontre un terme $+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{V\mathrm{d}x}{\mathrm{l}x}$, si n est un nombre entier, ou un terme

$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}\int \frac{V\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^{n-m}};$$

m étant le plus grand nombre entier contenu dans n.

184. Si on prend $P = x^m$, on aura

$$\int \frac{x^m\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\mathrm{l}x)^{n-1}} + \frac{n-1}{m+1}\int \frac{x^m\mathrm{d}x}{(\mathrm{l}x)^{n-1}};$$

et répétant cette réduction, en changeant n en $n-1$, en $n-2$, etc. on obtiendra

$$\int\frac{x^m dx}{(lx)^n}=-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}}-\frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}}\left.\begin{array}{l}\\ -\frac{(m+1)^2x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}}\cdots\cdots \\ +\frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots.1}\int\frac{x^m dx}{lx}\cdots\cdots\end{array}\right\}$$

en supposant que n soit un nombre entier.

La formule précédente conduit, lorsque $m=-1$, à

$$\int\frac{dx}{x(lx)^n}=-\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}}+const.$$

Elle ne donne rien lorsque $n=1$; mais si l'on avait en même temps $m=-1$ et $n=1$, la différentielle $\frac{dx}{xlx}$ qui viendrait alors, aurait pour intégrale $l(lx)+const.$, puisqu'en faisant $lx=u$, elle se transformerait en $\frac{du}{u}$.

L'intégrale $\int\frac{x^m dx}{lx}$, de laquelle dépend $\int\frac{x^m dx}{(lx)^n}$, quand n est un nombre entier, paraît devoir constituer une transcendante à part. On la ramène à une forme plus simple, en faisant $x^{m+1}=z$; car il vient alors $x^m dx=\frac{dz}{m+1}$, $lx=\frac{lz}{m+1}$, et parconséquent $\int\frac{x^m dx}{lx}=\int\frac{dz}{lz}$.

On trouvera plus bas le développement en série de cette dernière, qui se rapporte aussi aux fonctions exponentielles; ce qui donne en posant $lz=u$, $z=e^u$,

dz

$dz = e^u$ et $\int \frac{dz}{lz} = \int \frac{e^u du}{u}$, formule dont l'intégration exacte est encore à desirer.

185. Je vais m'occuper maintenant de l'intégration des fonctions exponentielles; je ferai d'abord remarquer que l'équation $d.a^x = a^x dx\, la$ (27) donne

$$a^x dx = \frac{1}{la} d.a^x, \text{ d'où } \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + const.$$

On tire aussi de là $dx = \frac{d.a^x}{a^x la}$; par ce moyen la différentielle Vdx devenant $\frac{Vd.a^x}{a^x la}$, se change en $\frac{Vdu}{ula}$, lorsqu'on fait $a^x = u$, et est algébrique par rapport à u lorsque V est une fonction algébrique de a^x. On trouve ainsi $\frac{a^x dx}{\sqrt{1+a^{nx}}} = \frac{du}{la\sqrt{1+u^n}}$.

186. Soit la différentielle $Pa^x dx$: on la décomposera dans les deux facteurs $a^x dx.P$; le premier étant intégré donne $\frac{1}{la}a^x$; et il en résulte parconséquent $\int Pa^x dx = \frac{1}{la}Pa^x - \frac{1}{la}\int a^x dP$. Faisant

$$dP = Qdx, \quad dQ = Rdx, \quad dR = Sdx, \text{ etc.}$$

et continuant la réduction précédente, on trouvera cette série:

$$\int Pa^x dx = \frac{1}{la}Pa^x - \frac{1}{(la)^2}Qa^x + \frac{1}{(la)^3}Ra^x \ldots\ldots$$
$$\ldots \pm \frac{1}{(la)^n}\int Va^x dx,$$

le signe $+$ répondant au cas où n est impaire, et le signe $-$ à celui où n est paire.

En intégrant d'abord le facteur Pdx de la différentielle proposée $\int Pa^x dx$, et faisant $\int Pdx = N$, on aurait cette réduction

$$\int Pa^x dx = a^x N - (la)\int Na^x dx;$$

et en la continuant, après avoir supposé $\int N dx = M$, $\int M dx = L$, etc. il viendrait

$$\int Pa^x dx = a^x N - (la)a^x M + (la)^2 a^x L \ldots \pm (la)^n \int Ga^x dx.$$

187. L'application de la première formule de l'article précédent conduira à l'intégrale exacte, toutes les fois que P sera une fonction rationnelle et entière, parce-qu'alors le nombre des quantités $Q = \frac{dP}{dx}$, $R = \frac{dQ}{dx}$, $S = \frac{dR}{dx}$, etc. sera limité; la dernière sera constante (18), et parconséquent $\int Va^x dx$ se changera en $V\int a^x dx = V\frac{a^x}{la} + const.$

Soit pour exemple $P = x^n$: l'équation

$$\int Pa^x dx = \frac{1}{la} Pa^x - \frac{1}{la}\int a^x dP$$

devient dans ce cas

$$\int a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{la} - \frac{n}{la}\int a^x x^{n-1} dx;$$

on en déduit

$$\int a^x x^{n-1} dx = \frac{a^x x^{n-1}}{la} - \frac{n-1}{la}\int a^x x^{n-2} dx,$$

et en continuant on parvient, lorsque n est un nombre entier positif, à

$$\int a^x x^n \mathrm{d}x =$$

$$\frac{a^x}{\mathrm{l}a}\left\{ x^n - \frac{n}{\mathrm{l}a} + \frac{n(n-1)}{(\mathrm{l}a)^2}x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(\mathrm{l}a)^3}x^{n-3}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(\mathrm{l}a)^n}\right\} + const.$$

188. La seconde formule du n° 186 ne convient qu'au cas où les quantités $N = \int P\mathrm{d}x$, $M = \int N\mathrm{d}x$, $L = \int M\mathrm{d}x$, etc. peuvent s'obtenir algébriquement; mais elle s'applique avec succès à l'exemple ci-dessus, quand n est un nombre entier négatif. On a alors

$$P = \frac{1}{x^n},\ N = \int P\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$$

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\mathrm{l}a}{n-1}\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^{n-1}},$$

d'où

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x \mathrm{l}a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$

$$-\frac{a^x(\mathrm{l}a)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}\ldots - \frac{a^x(\mathrm{l}a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1x}$$

$$+\frac{(\mathrm{l}a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x} + const.$$

On ne saurait pousser la réduction au-delà de $\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x}$; car l'équation

$$\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\mathrm{l}a}{n-1}\int \frac{a^x \mathrm{d}x}{x^{n-1}},$$

ne donne rien, lorsque $n = 1$.

S 2

On retombe encore dans cet exemple sur la transcendante $\int \frac{a^x dx}{x}$, dont j'ai déjà parlé n° 184; et si on pouvait obtenir son expression, on aurait en même temps l'intégrale $\int a^x x^n dx$, pour tous les cas où n est un nombre entier.

189. Lorsque n est un nombre fractionnaire, les deux séries dont on vient de faire usage, ne se terminent point. Si on avait, par exemple, $n = -\frac{1}{2}$, on trouverait par la première

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = \frac{a^x}{la\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{1}{2xla} + \frac{1.3}{4x^2(la)^2} + \frac{1.3.5}{8x^3(la)^3} + \text{etc.} \right\} + const.$$

et par la deuxième

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = 2a^x\sqrt{x} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{2xla}{1.3} + \frac{4x^2(la)^2}{1.3.5} - \frac{8x^3(la)^3}{1.3.5.7} + \text{etc.} \right\} + const.$$

Il faut observer que dans le cas où la formule proposée serait $\int a^x x^{n+\frac{p}{q}} dx$, n étant un nombre entier, on pourrait la ramener à $\int a^x x^{\frac{p}{q}} dx$, par le moyen de la première série, si n était positive, et par le moyen de la seconde, si n était négative.

190. En remplaçant a^x par son développement (25) dans la fonction $\int P a^x dx$, on aura

$$\int P a^x dx = \int P dx + \frac{la}{1}\int Px dx + \frac{(la)^2}{1.2}\int Px^2 dx + \frac{(la)^3}{1.2.3}\int Px^3 dx + \frac{(la)^4}{1.2.3.4}\int Px^4 dx + \text{etc.}$$

ce qui fournira un nouveau développement de $\int Pa^x dx$, toutes les fois qu'on pourra obtenir les fonctions

$$\int P dx,\ \int Px dx,\ \ldots \int Px^n dx,\ \text{etc.}$$

Si $P = x^n$, il viendra

$$\int a^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}\,\mathrm{l}a}{1(n+2)} + \frac{x^{n+3}(\mathrm{l}a)^2}{1.2(n+3)} + \frac{x^{n+4}(\mathrm{l}a)^3}{1.2.3(n+4)} + \text{etc.} + const.$$

et dans cette série, il faudra mettre $\mathrm{l}x$ au lieu de $\frac{x^{n+i}}{n+i}$, lorsque n sera un entier négatif, égal à $-i$.

L'application de ce moyen à l'intégrale $\int \frac{a^x dx}{x}$, donne le développement

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \mathrm{l}x + \frac{x\,\mathrm{l}a}{1.1} + \frac{x^2(\mathrm{l}a)^2}{1.2.2} + \frac{x^3(\mathrm{l}a)^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4(\mathrm{l}a)^4}{1.2.3.4.4} + \text{etc.} + const.$$

que la supposition de $a^x = z$, d'où il résulte $x = \frac{\mathrm{l}z}{\mathrm{l}a}$ et $\mathrm{l}x = \mathrm{ll}x - \mathrm{ll}a$, transforme en

$$\int \frac{dz}{\mathrm{l}z} = \mathrm{ll}z + \frac{\mathrm{l}z}{1} + \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{l}z)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(\mathrm{l}z)^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{(\mathrm{l}z)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} + const.$$

191. Il y a encore un autre moyen d'intégrer une fonction exponentielle, telle par exemple que $\frac{e^x x dx}{(1+x)^2}$; c'est de chercher à la rapporter à la différen-

tielle de la fonction $e^x P$, qui est $e^x(\mathrm{d}P + P\mathrm{d}x)$, et dans laquelle P représente une fonction algébrique de x. C'est principalement la sagacité et l'habitude du calcul qui peuvent guider dans ce procédé. L'exemple proposé étant fort simple, il suffit de faire $1 + x = z$: on a alors

$$\frac{e^x x\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{e^{z-1}(z-1)\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{1}{e}\left\{e^z\left(\frac{1}{z}\mathrm{d}z - \frac{\mathrm{d}z}{z^2}\right)\right\};$$

et avec un peu d'attention on voit bien que $-\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$ étant la différentielle de $\frac{1}{z}$, il faut prendre $P = \frac{1}{z}$, d'où il résulte l'intégrale $\frac{e^z}{ez} + const.$ Remettant au lieu de z sa valeur, on trouve $\int \frac{e^x x\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + const.$

De l'intégration des fonctions circulaires.

192. Soit la formule $\int X\mathrm{d}x \,\mathrm{arc}\,(\sin = x)$; si on intègre d'abord le facteur $X\mathrm{d}x$, en observant que $\mathrm{d.arc}\,(\sin = x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, et faisant $\int X\mathrm{d}x = V$, on aura

$$\int X\mathrm{d}x.\mathrm{arc}\,(\sin = x) = V.\mathrm{arc}\,(\sin = x) - \int \frac{V\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}:$$

l'intégration de la formule proposée sera donc ramenée à celle d'une fonction algébrique, si V est algébrique.

En prenant pour exemple $\int x^n\mathrm{d}x.\mathrm{arc}\,(\sin = x)$, on trouvera $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, et $\int x^n\mathrm{d}x\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) =$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}.\mathrm{arc}\,(\sin = x) - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}:$$

la formule $\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ a été traitée dans les nos 173 et 174.

193. Comme $d.\text{arc}(\cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$d.\text{arc}(\text{tang}=x) = \frac{dx}{1+x^2},$$

on aura, en opérant de la même manière que ci-dessus,

$$\int Xdx.\text{arc}(\cos=x) = V.\text{arc}(\cos=x) + \int \frac{Vdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int Xdx.\text{arc}(\text{tang}=x) = V.\text{arc}(\text{tang}=x) - \int \frac{Vdx}{1+x^2};$$

et l'intégration de ces formules ne dépendra que de celle d'une fonction algébrique, toutes les fois que V sera algébrique.

194. Si z représente un arc dont le sinus, ou le cosinus, ou la tangente, etc. soient exprimés en fonction de x, c'est-à-dire, qu'on ait $dz = X_1dx$, X_1 étant une fonction donnée de x, on obtiendra $\int Xz^n dx$ par un procédé semblable à celui des articles précédens. Soit $\int Xdx = V$; on aura

$$\int z^n Xdx = Vz^n - n\int Vz^{n-1}dz;$$

mettant pour dz sa valeur, on trouvera

$$\int z^n Xdz = Vz^n - n\int z^{n-1} VX_1dx.$$

En suivant cette marche, on abaissera de plus en plus l'exposant de z, et on parviendra enfin à faire disparaître cet arc, si n est un nombre entier positif.

Le cas le plus simple est celui où $X = 1$, où z est l'arc dont le sinus $= x$: on trouve alors, successivement

S 4

$$X1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, V = x, \int z^n dx = xz^n - n\int z^{n-1}\frac{x dz}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$V = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}, \int z^{n-1}dx = -z^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int z^{n-2}dx;$$

et ces valeurs donnent $\int z^n dx =$

$$z^n x + nz^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n(n-1)z^{n-2}x$$
$$-n(n-1)(n-2)z^{n-3}\sqrt{1-x^2} + \text{etc.}$$

série qui s'arrête lorsque n est un nombre entier positif.

Si on avait $Xdx = dz$, ou $X = X1$, l'intégrale $\int Xz^n dx$ se changerait en $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + const.$; et si on substituait à z^n une fonction algébrique quelconque de z, l'intégrale considérée par rapport à z rentrerait dans quelqu'une des formules traitées précédemment.

195. Avant de passer à des fonctions un peu générales, des quantités z, $\sin z$, $\cos z$, etc. il faut se rappeler que par les nos 32, 33, on a

$$d.\sin nz = ndz \cos nz, \text{ d'où } \int dz \cos nz = \frac{1}{n}\sin nz + const.$$

$$d.\cos nz = -ndz \sin nz, \quad \int dz \sin nz = -\frac{1}{n}\cos nz + const.$$

$$d.\tang nz = \frac{ndz}{(\cos nz)^2}, \int \frac{dz}{(\cos nz)^2} = \frac{1}{n}\tang nz + const.$$

$$d.\cot nz = -\frac{ndz}{(\sin nz)^2}, \int \frac{dz}{(\sin nz)^2} = -\frac{1}{n}\cot nz + const.$$

$$d.\sec nz = \frac{ndz \sin nz}{(\cos nz)^2}, \int \frac{dz \sin nz}{(\cos nz)^2} = \frac{1}{n}\sec nz + const.$$
$$= \frac{1}{n\cos nz} + const.$$

$$d.\text{cosec} nz = -\frac{ndz \cos nz}{(\sin nz)^2}, \int \frac{dz \cos nz}{(\sin nz)^2} = -\frac{1}{n}\text{cosec} nz + const.$$
$$= -\frac{1}{n\sin nz} + const.$$

196. De ces intégrations résulte celle des expressions

$$dz(A+B\sin z+C\sin 2z+D\sin 3z+\text{etc.})$$
$$dz(A+B\cos z+C\cos 2z+D\cos 3z+\text{etc.})$$

qui donnent

$$Az-B\cos z-\tfrac{1}{2}C\cos 2z-\tfrac{1}{3}D\cos 3z-\text{etc.}+const.$$
$$Az+B\sin z+\tfrac{1}{2}C\sin 2z+\tfrac{1}{3}D\sin 3z+\text{etc.}+const.$$

197. Il est très-important d'observer que l'on peut ramener à des termes de la forme

$$A\sin mz\,,\quad \text{ou } A\cos mz,$$

toute fonction rationnelle de sin z et de cos z. Cette opération qui réduit l'intégration d'une différentielle de même forme, à ce qui a été dit dans le n° précédent, facilite encore le calcul numérique des formules résultantes, parcequ'il y a beaucoup de cas où l'usage des sinus et des cosinus des multiples d'un arc, est plus commode que celui des puissances de ces lignes.

Les formules (*Trig.* 26)

$$\sin a\cos b=\tfrac{1}{2}\sin(a+b)+\tfrac{1}{2}\sin(a-b)$$
$$\cos a\sin b=\tfrac{1}{2}\sin(a+b)-\tfrac{1}{2}\sin(a-b)$$
$$\sin a\sin b=-\tfrac{1}{2}\cos(a+b)+\tfrac{1}{2}\cos(a-b)$$
$$\cos a\cos b=\tfrac{1}{2}\cos(a+b)+\tfrac{1}{2}\cos(a-b)$$

sont les élémens de la transformation que je viens d'indiquer ; car si l'on prend $b=a$ dans les deux dernières, elles donneront

$$\sin a^2=-\tfrac{1}{2}\cos 2a+\tfrac{1}{2}$$
$$\cos a^2=\tfrac{1}{2}\cos 2a+\tfrac{1}{2},$$

en faisant attention que $\cos(a-b) = \cos 0 = 1$. Puis comme

$$\sin a^3 = \sin a^2 . \sin a, \quad \cos a^3 = \cos a^2 . \cos a,$$

il viendra

$$\begin{aligned} \sin a^3 &= (-\tfrac{1}{2}\cos 2a + \tfrac{1}{2}) \sin a \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos 2a \sin a + \tfrac{1}{2}\sin a \\ \cos a^3 &= (\tfrac{1}{2}\cos 2a + \tfrac{1}{2}) \cos a \\ &= \tfrac{1}{2}\cos 2a \cos a + \tfrac{1}{2}\cos a. \end{aligned}$$

Ces deux résultats renferment les produits

$$\cos 2a \sin a \qquad \text{et } \cos 2a \cos a$$

qu'on exprimera en sinus des multiples de a, au moyen de la première et de la dernière des formules rapportées plus haut, et en y faisant $b = 2a$.

Ce calcul est trop facile pour que je m'y arrête ; et il est évident qu'en procédant de proche en proche, comme on vient de le voir, on s'élevera

de $\sin a^3$ à $\sin a^4$, à $\sin a^5$, etc.
de $\cos a^3$ à $\cos a^4$, à $\cos a^5$, etc.

198. Au lieu de construire ces formules particulières, j'en vais tirer de générales, des équations (164)

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx,$$
$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx.$$

En ajoutant ces deux équations, et dégageant $\cos nx$, on trouve

$$\cos nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n}{2};$$

puis en retranchant la seconde de la première, et dégageant $\sin nx$, on obtient

$$\sin nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces expressions, quoiqu'affectées d'imaginaires, n'en sont pas moins réelles, parceque ces signes disparaissent tous par le développement des puissances indiquées. En effet on a

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos x^n + \frac{n}{1}\sqrt{-1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos x^{n-2}\sin x^2 - \text{etc.}$$

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos x^n - \frac{n}{1}\sqrt{-1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \text{etc.}$$

et substituant ces séries dans les valeurs ci-dessus, on arrive à

$$\cos nx = \cos x - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos x^{n-4}\sin x^4 - \text{etc.}$$

$$\sin nx = \frac{n}{1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos x^{n-3}\sin x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos x^{n-5}\sin x^5 - \text{etc.}$$

199. Par les formules ci-dessus, on développe les sinus et les cosinus d'arcs multiples, suivant les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple ; voici comment on peut résoudre la question inverse, c'est-à-dire, celle où il s'agit d'exprimer les puissances du

sinus et du cosinus de l'arc simple, par les sinus et les cosinus de ses multiples :

Soit

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = u$$

$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = v,$$

on aura

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(u+v), \quad \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v);$$

et de là on tirera d'abord

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}(u+v)^n.$$

En développant la puissance indiquée dans le second membre de cette équation, il viendra

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{u^n + \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}\right\};$$

mais dans l'expression $(u+v)^n$, on peut changer v en u, et réciproquement, ce qui donnera

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{v^n + \frac{n}{1}v^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}v^{n-3}u^3 + \text{etc.}\right\};$$

et en ajoutant ces deux résultats, on aura

$$2\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left\{u^n + v^n + \frac{n}{1}(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \text{etc.}\right\}$$

On peut donner à cette équation la forme suivante,

$$2^{n+1}\cos x^n = \Big\{u^n + v^n + \frac{n}{1}uv(u^{n-2}+v^{n-2})$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4})+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^3v^3(u^{n-6}+v^{n-6})+\text{etc.}\Big\};$$

mais l'équation

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + \tfrac{1}{2}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n$$
$$= \tfrac{1}{2}u^n + \tfrac{1}{2}v^n,$$

ayant lieu quelle que soit n (198) conduit à

$$u^n + v^n = 2\cos nx,$$

et en général, à

$$u^{n-m} + v^{n-m} = 2\cos(n-m)x;$$

de plus, il est aisé de voir que $uv = 1$: on aura donc

$$2^{n+1}\cos x^n =$$
$$\Big\{2\cos nx + \frac{2n}{1}\cos(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x$$
$$+\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \text{etc.}\Big\},$$

ou bien, en divisant tout par 2,

$$2^n\cos x^n = \Big\{\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \text{etc.}\Big\};$$

formule toujours applicable, quelle que soit n.

En continuant cette formule, comme celle du binome de Newton, on arrivera, lorsque n sera un nombre entier, à des cosinus d'arcs négatifs, qui sont précisément

les mêmes que ceux des arcs positifs correspondans ; on écrira donc $\cos(m-n)x$ au lieu de $\cos(n-m)x$, et dans ce cas la formule s'abrège ainsi qu'on va le voir.

Dans le développement de $(u+v)^n$, lorsque n est un nombre entier, les termes placés à égale distance des extrêmes ont le même coefficient ; pareille chose aura lieu dans l'expression

$$\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \text{etc.}$$

et de plus les cosinus placés à égale distance des extrêmes de cette formule sont égaux. En effet, le premier terme étant $\cos nx$, le dernier est affecté de $\cos(n-2n)x$ ou de $\cos - nx$, qui est égal à $\cos nx$: au terme affecté de $\cos(n-2m)x$, qui en a m avant lui, correspond au terme affecté de $\cos(-n+2m)x$, qui en a m après lui ; et comme

$$\cos(-n+2m)x = \cos-(n-2m)x = \cos(n-2m)x.$$

on peut omettre les termes affectés de cosinus d'arcs négatifs, en prenant le double de chacun de ceux qui en contiennent de positifs.

On pourra donc, en s'arrêtant au terme où les arcs deviennent négatifs, écrire............ $2^n \cos x^n =$

$$\left\{2\cos nx + \frac{2n}{1}\cos(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \text{etc.}\right\}$$

Il faut néanmoins observer que dans le cas où n est un nombre pair, la formule a un terme moyen également éloigné de l'un ou de l'autre extrême, et représenté par

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\ldots\frac{n}{2}}\cos(n-n)\,x$$: à cause de

$\cos 0 = 1$, il se réduit à $\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{n}{2}}$; et parce-qu'il est unique, il ne doit pas être multiplié par 2 comme les autres, à moins qu'on n'en prenne préalablement la moitié, ou qu'on n'écrive

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\frac{n}{2}+1}{1.2\ldots\ldots\ldots\frac{n}{2}}.$$

D'après ces remarques, on aura enfin. . $2^{n-1}\cos x^n =$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

en observant de s'arrêter dans cette formule, lorsqu'on rencontrera un arc négatif, et de ne prendre que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul qu'on trouvera, si n est pair. Avec cette attention, il sera facile de former les valeurs de la table ci-jointe :

$\cos x = \cos x$

$2\cos x^2 = \cos 2x + 1$

$4\cos x^3 = \cos 3x + 3\cos x$

$8\cos x^4 = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$

$16\cos x^5 = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$

$32\cos x^6 = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$

$64\cos x^7 = \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x$

etc.

200. Pour déterminer $\sin x^n$, on fera usage de l'équation

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v),$$

et on trouvera

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(u-v)^n,$$

ou

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{u^n - \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}\right\}.$$

1°. Soit n un nombre pair, ou une fraction de numérateur pair; dans ce cas, $(u-v)^n = (v-u)^n$, et parconséquent on aura encore

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n.$$

En développant le second membre de cette équation qu'on ajoutera à la première, il viendra

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\begin{array}{l} u^n + v^n - \frac{n}{1}(u^{n-1}v + v^{n-1}u) \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

ou bien

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\begin{array}{l} u^n + v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} + v^{n-2}) \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^3v^3(u^{n-6} + v^{n-6}) + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

résultat

résultat qui est le même, aux signes près, que celui du n° précédent; on peut donc écrire tout de suite

$$(2\sqrt{-1})^n \sin x^n =$$
$$\cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)\,x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\,x$$
$$-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \text{etc.}$$

L'imaginaire disparaît, parceque n est un nombre pair; et on a $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n$, le signe supérieur ayant lieu, si n est doublement pair, c'est-à-dire multiple de 4, et le signe inférieur, s'il est simplement divisible par 2.

On fera sur le second membre de cette équation les mêmes raisonnemens que dans l'article précédent; et parceque n est un nombre entier, on en conclura qu'on peut se borner aux termes qui ne renferment que des arcs positifs, pourvu qu'on prenne le double de chacun. De plus, comme n est paire, il y aura un terme dégagé de cosinus, qu'il ne faudra pas doubler; et en divisant tout par 2, on aura

$$\pm 2^{n-1}\sin x^n = \left\{ \begin{array}{l} \cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\,x \\ -\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)\,x + \text{etc.} \end{array} \right\},$$

en observant de s'arrêter lorsqu'on trouvera un arc nul, et de ne prendre que la moitié du coefficient de ce terme.

2°. Si n est un nombre impair, il vient alors

$$(v-u)^n = -(u-v)^n,$$

parconséquent

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(u-v)^n = -\frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n;$$

et le développement de la seconde expression est

$$\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{ -v^n + \frac{n}{1}v^{n-1}u - \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}v^{n-3}u^3 - \text{etc.} \right\}$$

En l'ajoutant à celui de la première, et faisant les réductions nécessaires, on trouvera

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{ u^n - v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} - v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4} - v^{n-4}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^3v^3(u^{n-6} - v^{n-6}) + \text{etc.} \right\}$$

Mais par le nº 198,

$$\sin nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{ (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n \} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u^n - v^n),$$

quelle que soit n; quant au produit uv, il est toujours égal à l'unité : ainsi, on aura en général

$$u^{n-m} - v^{n-m} = 2\sqrt{-1}\sin(n-m)x,$$

et parconséquent

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^{n-1}}\left\{\begin{array}{l}\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin(n-6)x + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

L'imaginaire n'affecte pas plus cette formule que les précédentes; car n étant un nombre impair,

$$(2\sqrt{-1})^{n-1} = \pm 2^{n-1},$$

le signe supérieur ayant lieu si $n-1$ est un multiple de 4, le signe inférieur si $n-1$ est seulement un multiple de 2.

On peut encore ici se borner aux termes affectés de sinus d'arcs positifs, en prenant le double de chacun. Car il est d'abord évident, par les mêmes raisons que précédemment, que les termes placés à égale distance des extrêmes, ont le même coefficient, et que l'un est affecté d'un arc positif, et l'autre d'un arc négatif : à la vérité, comme le nombre des termes de la formule est pair, et qu'ils sont alternativement positifs et négatifs, les termes correspondans seront de signe contraire; mais aussi le sinus de l'arc négatif est lui-même négatif : cette différence de signe se trouve donc corrigée, et les termes dont il s'agit se réunissent dans un seul.

D'après ces considérations, et en divisant par 2, il viendra

$$\pm 2^{n-1}\sin x^n = \left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2.}\sin(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\sin(n-6)x + \text{etc.}\right\}.$$

On déduira des deux formules de cet article, les valeurs contenues dans la table suivante :

$$\sin x = \sin x$$
$$2\sin x^2 = -\cos 2x + 1$$
$$4\sin x^3 = -\sin 3x + 3\sin x$$
$$8\sin x^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$$
$$16\sin x^5 = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x$$
$$32\sin x^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10$$
$$64\sin x^7 = -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x$$

etc.

Voilà pour les cas où n serait un nombre entier ; s'il était fractionnaire, il faudrait avoir recours à la première formule du n° précédent. On y ferait $x = 1^q - z$, ce qui donnerait $\cos x = \sin z$; et parconséquent l'expression de $\cos x^n$ par les cosinus des multiples de x, serait celle de $\sin z^n$ par les cosinus des multiples de $1^q - z$, ou du complément de l'arc z.

201. Soit à intégrer la différentielle $\int dx \cos x^4$; on tirera d'abord des formules du n° 199

$$\cos x^4 = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8},$$

et on aura

$$\int dx \cos x^4 = \frac{1}{8}\int dx \cos 4x + \frac{1}{2}\int dx \cos 2x + \frac{3}{8}\int dx$$
$$= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3x}{8} + \textit{const.}$$

Cet exemple montre assez comment il faudrait opérer sur tous ceux qui pourraient s'offrir.

202. Les formules

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

changeant les fonctions de sinus et de cosinus en exponentielles, ramènent l'intégration des unes à celle des autres.

On peut aussi changer la différentielle $dx \sin x^m \cos x^n$, en une autre qui soit comprise dans les différentielles binomes : il suffit de faire $\sin x = z$, d'où il résulte

$$\cos x = \sqrt{1-z^2}, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \; (35) ;$$

et on obtient ensuite

$$\int dx \sin x^m \cos x^n = \int z^m dz \, (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

En appliquant à la dernière expression les réductions des nos 170-172, on l'intégrera si m est un nombre impair ; on la fera dépendre de

$$\int dz \, (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

si m est paire ; et on ramènera cette dernière à $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ ou à un arc de cercle, si n est un nombre entier. Dans tous les autres cas, on réduira l'intégrale de la formule proposée à celle de la différentielle analogue la plus simple.

Il est visible qu'on peut transformer de la même manière les différentielles contenant les autres lignes trigonométriques.

203. Les formules (*A*), (*B*), (*C*) et (*D*) des nos 170, 171, 172, pourraient être facilement transformées, par rapport à la différentielle $dz \sin z^m \cos z^n$; mais on parvient immédiatemrnt aux même résultats, en décomposant en facteurs cette différentielle.

Si on la met d'abord sous la forme $dz \sin z \cos z^n . \sin z^{m-1}$, le premier facteur $dz \sin z \cos z^n$ pouvant, à cause que $dz \sin z = d . \cos z$, s'intégrer, on trouve

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \int dz \sin z \cos z^n \sin z^{m-1} =$$

$$-\frac{1}{n+1} \cos z^{n+1} \sin z^{m-1} + \frac{m-1}{n+1} \int dz \cos z^{n+2} \sin z^{m-2};$$

et parceque $\cos z^{n+2} = \cos z^n . \cos z^2 = \cos z^n (1 - \sin z^2)$, on obtient

$$\int dz \cos z^{n+2} \sin z^{m-2} = \int dz \cos z^n \sin z^{m-2} - \int dz \cos z^n \sin z^m.$$

Substituant dans la première équation, et prenant la valeur de $\int dz \sin z^m \cos z^n$, il en résultera (*A*)

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = -\frac{\sin z^{m-1} \cos z^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dz \sin z^{m-2} \cos z^n.$$

On a aussi $\int dz \sin z^m \cos z^n = \int dz \cos z \sin z^m . \cos z^{n-1} =$

$$\frac{1}{m+1} \sin z^{m+1} \cos z^{n-1} + \frac{n-1}{m+1} \int dz \sin z^{m+2} \cos z^{n-2};$$

de plus,

$$\sin z^{m+2} = \sin z^m . \sin z^2 = \sin z^m (1 - \cos z^2),$$

et parconséquent

$$\int dz \sin z^{m+2} \cos z^{n-2} = \int dz \sin z^m \cos z^{n-2} - \int dz \sin z^m \cos z^n.$$

Cette valeur, mise dans celle de $\int dz \sin z^m \cos z^n$, conduit à une équation de laquelle on tire (*B*)

$$\int dz \sin z^m \cos z^n = \frac{\sin z^{m+1} \cos z^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dz \sin z^m \cos z^{n-2}.$$

En changeant successivement m en $m-2$, $m-4$, etc. dans la première formule, n en $n-2$, $n-4$, etc. dans la seconde, et en les employant alternativement, on parvient à ôter des exposans m et n sous le signe $\int$, le plus grand multiple de 2 qui puisse y être contenu; ce qui conduit à l'intégration algébrique de la formule $dz \sin z^m \cos z^n$, quand l'un des exposans m ou n est impair, et fait tomber quand m et n sont paires, sur la différentielle $dz \sin z^0 \cos z^0$, dont l'intégrale renferme l'arc z.

Si l'on applique, par exemple, ces formules à $\int dz \sin z^4 \cos z^2$, la première donnera

$$\int dz \sin z^4 \cos z^2 = -\frac{\sin z^3 \cos z^3}{6} + \frac{3}{6}\int dz \sin z^2 \cos z^2;$$

puis on trouvera par la seconde

$$\int dz \sin z^2 \cos z^2 = \frac{\sin z^3 \cos z}{4} + \frac{1}{4}\int dz \sin z^2 \cos z^0;$$

revenant ensuite à la première, on obtiendra, en y faisant $m=2$ et $n=0$,

$$\int dz \sin z^2 = -\frac{\sin z \cos z}{2} + \frac{1}{2}\int dz = -\frac{\sin z \cos z}{2} + \frac{z}{2}:$$

enfin remontant de cette valeur à celle de la différentielle proposée, il viendra

$$\int dz \sin z^4 \cos z^2 = -\frac{1}{6}\sin z^3 \cos z^3 + \frac{3.1}{6.4}\sin z^3 \cos z$$
$$-\frac{3.1.1}{6.4.2}\sin z \cos z + \frac{3.1.1}{6.4.2}z + const;$$

La différentielle $\int dz \sin z^4 \cos z^3$ étant traitée de la même manière, conduirait successivement à

$$\int dz \sin z^4 \cos z^3 = -\frac{\sin z^3 \cos z^4}{7} + \frac{3}{7}\int dz \sin z^2 \cos z^3$$

$$\int dz \sin z^2 \cos z^3 = \frac{\sin z^3 \cos z^2}{5} + \frac{2}{5}\int dz \sin z^2 \cos z$$

$$\int dz \sin z^2 \cos z = -\frac{\sin z \cos z^2}{3} + \frac{1}{3}\int dz \cos z\,;$$

et comme $\int dz \cos z = -\sin z$, on en conclurait

$$\int dz \sin z^4 \cos z^3 = -\frac{1}{7}\sin z^3 \cos z^4 + \frac{3.1}{7.5}\sin z^3 \cos z^2$$
$$-\frac{3.2.1}{7.5.3}\sin z \cos z^2 - \frac{3.2.1}{7.5.3}\cos z + const.$$

204. Ce dernier exemple, et tous ceux où l'un des exposans m, n, est impair, se ramène sur-le-champ aux fonctions algébriques entières, en observant que

$$\int dz \sin z^{2p+1} \cos z^q = \int dz \sin z . \cos z^q (\sin z^2)^p$$
$$\int dz \sin z^p \cos z^{2q+1} = \int dz \cos z . \sin z^p (\cos z^2)^q,$$

que

$$(\sin z^2)^p = (1 - \cos z^2)^p,\ (\cos z^2)^q = (1 - \sin z^2)^q,$$

et que

$$dz \sin z = d . \cos z,\quad dz \cos z = d . \sin z.$$

Par là on arrive à

$$\int u^q du (1 - u^2)^p,\quad \int u^p du (1 - u^2)^q,$$

en faisant $\cos z = u$, ou $\sin z = u$; et ces intégrales s'obtiennent en développant les puissances entières de $1 - u^2$.

205. Lorsque $n = 0$, la formule (A) devient

$$\int dz \sin z^m = -\frac{\sin z^{m-1} \cos z}{m} + \frac{m-1}{m}\int dz \sin z^{m-2},$$

et conduit à $\int dz \sin z$, ou à $\int dz$, selon que m est impaire ou paire.

La formule (B) quand on y fait $m = 0$, se change en

$$\int dz \cos z^n = \frac{\sin z \cos z^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int dz \cos z^{n-2},$$

et mène à $\int dz \cos z$, ou à $\int dz$, selon que n est impaire ou paire.

206. Les réductions du n° 203 peuvent s'employer pour les deux différentielles

$$\frac{dz \sin z^m}{\cos z^n}, \qquad \frac{dz \cos z^n}{\sin z^m}:$$

mais j'observerai qu'il suffit de s'occuper de l'une d'elles ; car si on fait $z = 1^q - y$, on aura $dz = -dy$, $\sin z = \cos y$, $\cos z = \sin y$; et la substitution de ces valeurs dans la première, lui fera prendre la même forme que la seconde, et réciproquement.

En changeant $+n$ en $-n$, dans la formule (A) du n° cité, il viendra

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n} = -\frac{1}{m-n} \frac{\sin z^{m-1}}{\cos z^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{dz \sin z^{m-2}}{\cos z^n}.$$

On voit que cette réduction conduit à

$$\int \frac{dz \sin z}{\cos z^n}, \quad \text{ou à} \quad \int \frac{dz}{\cos z^n},$$

selon que m est impaire ou paire.

La première de ces formules revient à $-\int \frac{du}{u^n}$, lorsqu'on fait $\cos z = u$, et s'intègre facilement; la seconde se traite par la réduction dont je vais parler.

Si on fait n négative dans la formule (B) du n° 203, on trouvera

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n} = \frac{1}{m-n} \frac{\sin z^{m+1}}{\cos z^{n+1}} - \frac{(n+1)}{m-n} \int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n+2}},$$

d'où on tirera

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n+2}} = \frac{1}{n+1} \frac{\sin z^{m+1}}{\cos z^{n+1}} - \frac{m-n}{n+1} \int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n};$$

et changeant n en $n-2$, il en résultera

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^n} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin z^{m+1}}{\cos z^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{dz \sin z^m}{\cos z^{n-2}}.$$

Cette formule comprenant le cas où $m = 0$, s'applique à l'intégrale $\int \frac{dz}{\cos z^n}$; et en générale elle conduit à

$$\int \frac{dz \sin z^m}{\cos z}, \quad \text{ou à} \quad \int dz \sin z^m,$$

selon que n est impaire ou paire.

La seconde de ces intégrales a été traitée dans le n° 205; et la première, au moyen de la formule (A) du n° 203, où l'on fait $n = 1$, se ramène à

$$\int \frac{dz \sin z}{\cos z}, \quad \text{ou à} \quad \int \frac{dz}{\cos z},$$

selon que m est impaire ou paire; il sera donc à propos de considérer à part ces intégrales; c'est ce que je ferai plus loin.

On observera aussi que la première des réductions

de cet article devient illusoire quand $m=n$, et la seconde quand $n=1$, et que cette dernière donne sur-le-champ l'intégrale, quand $m=n-2$.

207. Soit $\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n}$; en changeant à-la-fois $+m$ en $-m$ et $+n$ en $-n$, dans les réductions du n° 203, on trouvera

$$\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n} = \frac{1}{m+n} \frac{1}{\sin z^{m+1} \cos z^{n-1}} + \frac{m+1}{m+n} \int \frac{dz}{\sin z^{m+2} \cos z^n}$$

$$\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n} = -\frac{1}{m+n} \frac{1}{\sin z^{m+1} \cos z^{n+1}} + \frac{n+1}{m+n} \int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^{n+2}},$$

d'où il résultera

$$\int \frac{dz}{\sin z^{m+2} \cos z^n} = -\frac{1}{m+1} \frac{1}{\sin z^{m+1} \cos z^{n-1}} + \frac{m+n}{m+1} \int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n}$$

$$\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^{n+2}} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin z^{m-1} \cos z^{n+1}} + \frac{m+n}{n+1} \int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n}.$$

Changeant m en $m-2$, dans la première de ces équations, et n en $n-2$, dans la seconde, on aura deux nouvelles formules (C) et (D),

$$\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n} = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{\sin z^{m-1} \cos z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dz}{\sin z^{m-2} \cos z^n}$$

$$\int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^n} = \frac{1}{n-1} \frac{1}{\sin z^{m-1} \cos z^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dz}{\sin z^m \cos z^{n-2}}.$$

Ces deux formules peuvent être employées alternativement comme l'ont été celles du n° 203, dans l'exemple $\int dz \sin z^4 \cos z^2$, et diminueront ainsi successivement l'exposant de $\sin z$, puis celui de $\cos z$; et en continuant les réductions autant qu'il sera pos-

sible, on parviendra à l'une des trois intégrales ci-dessous :

$$\int \frac{dz}{\sin z}, \quad \int \frac{dz}{\cos z}, \quad \int \frac{dz}{\sin z \cos z}.$$

208. Je vais en conséquence m'occuper, dans cet article, de l'intégration des quatre différentielles suivantes :

$$\frac{dz}{\sin z}, \quad \frac{dz}{\cos z}, \quad \frac{dz \cos z}{\sin z}, \quad \frac{dz \sin z}{\cos z}.$$

La première devient successivement

$$\frac{dz}{\sin z} = \frac{dz \sin z}{\sin z^2} = \frac{dz \sin z}{1 - \cos z^2} = \frac{-dx}{1 - x^2},$$

en faisant $\cos z = x$; son intégrale est donc

$$\int \frac{dz}{\sin z} = -\tfrac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = -\tfrac{1}{2} l \frac{1+\cos z}{1-\cos z} = l \frac{\sqrt{1-\cos z}}{\sqrt{1+\cos z}} + const.$$

Pour la seconde on a

$$\frac{dz}{\cos z} = \frac{dz \cos z}{\cos z^2} = \frac{dz \cos z}{1 - \sin z^2} = \frac{dx}{1 - x^2},$$

en faisant $\sin z = x$; et parconséquent

$$\int \frac{dz}{\cos z} = \tfrac{1}{2} l \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tfrac{1}{2} l \frac{1+\sin z}{1-\sin z} = l \frac{\sqrt{1+\sin z}}{\sqrt{1-\sin z}} + const.$$

La troisième et la quatrième sont évidemment des différentielles logarithmiques, ensorte qu'on a

$$\int \frac{dz \cos z}{\sin z} = \quad l \sin z + const. = \int \frac{dz}{\tan z} = \int dz \cot z$$

$$\int \frac{dz \sin z}{\cos z} = - l \cos z + const. = \int dz \tan z = \int \frac{dz}{\cot z}.$$

En ajoutant ensemble ces deux dernières formules, on trouvera

$$\int \frac{dz}{\sin z \cos z} = l \frac{\sin z}{\cos z} + const. = l \tan z + const.$$

On peut donner aux intégrales

$$\int \frac{dz}{\sin z} = l \frac{\sqrt{1 - \cos z}}{\sqrt{1 + \cos z}} + const.$$

et

$$\int \frac{dz}{\cos z} = l \frac{\sqrt{1 + \sin z}}{\sqrt{1 - \sin z}} + const.$$

une forme plus simple. On sait que

$$\tan \tfrac{1}{2}(A+B) \,.\, \tan \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\cos B - \cos A}{\cos B + \cos A},$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} \; (Trig.\ 26).$$

Cela posé, en prenant $\cos B = 1$, $\cos A = \cos z$, on aura $B = 0$, $A = z$; la première formule deviendra

$$(\tan \tfrac{1}{2} z)^2 = \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z},$$

et donnera parconséquent

$$\int \frac{dz}{\sin z} = l.\tang \tfrac{1}{2}z + const.$$

Si on fait ensuite dans la seconde formule $\sin A = 1$ et $\sin B = \sin z$, il viendra $A = 1^q$ et $B = z$,

d'où $$\frac{1+\sin z}{1-\sin z} = \frac{\tang(0^q,5+\frac{1}{2}z)}{\tang(0^q,5-\frac{1}{2}z)};$$

mais

$$\tang(0^q,5-\tfrac{1}{2}z) = \cot(0^q,5+\tfrac{1}{2}z) = \frac{1}{\tang(0^q,5+\frac{1}{2}z)}:$$

donc $$\frac{1+\sin z}{1-\sin z} = [\tang(0^q,5+\tfrac{1}{2}z)]^2;$$

donc $$\int \frac{dz}{\cos z} = l.\tang(0^q,5+\tfrac{1}{2}z) + const.$$

En remarquant avec soin la liaison des diverses formules construites précédemment, il sera facile de voir que l'intégrale de $dz \sin z^m \cos z^n$ s'obtiendra toutes les fois que m et n seront des nombres entiers, soit positifs, soit négatifs; il n'en est pas de même quand ces exposans sont fractionnaires. Il faut avoir recours aux séries, excepté dans un petit nombre de cas où l'intégration se présente d'elle-même.

Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales.

209. Le développement des intégrales en série, ne conduit à une approximation que dans le cas où les séries qu'on obtient sont convergentes, ce qui n'arrive pas toujours; c'est pourquoi les Analystes ont

cherché les moyens de parvenir à des valeurs approchées des intégrales, quelles que soient les fonctions différentielles proposées. Le théorême de Taylor mène d'une manière très-simple aux formules qu'Euler a construites pour cet objet; mais avant d'y parvenir, je ferai connaître quelques dénominations relatives aux divers points de vue sous lesquels les analystes envisagent les intégrales.

La nécessité d'ajouter une constante arbitraire à une intégrale, pour lui donner toute la généralité qu'elle comporte, fait voir que ces fonctions sont doublement indéterminées, puisqu'on ne saurait assigner leur valeur lorsqu'on en fixe une pour la variable dont elles dépendent, mais qu'il faut encore déterminer leur constante qui est susceptible de toutes les valeurs possibles. On détermine ordinairement cette constante, en assujétissant l'intégrale à s'évanouir pour une valeur donnée de x. On en a déjà vu plusieurs exemples (164, 176, 177), et cela revient en général à ce qui suit :

Si $\int X\mathrm{d}x = P + C$, P désignant la fonction variable déduite immédiatement du procédé de l'intégration, C la constante arbitraire, et que l'intégrale doive, s'évanouir pour une valeur $x = a$ qui change P en A; on posera l'équation $A + C = 0$, de laquelle on tire

$$C = -A \quad \text{et} \quad \int X\mathrm{d}x = P - A.$$

Sous cette forme l'intégrale $\int X\mathrm{d}x$ n'est plus que la différence entre la valeur que prend la fonction P lorsque $x = a$, et celle qu'elle acquiert pour toute autre valeur de la même variable. Si, par exemple, $x = b$, change P en B, il vient

$$\int X\mathrm{d}x = B - A.$$

Il est à propos de remarquer que ce résultat s'obtient immédiatement, sans qu'il soit besoin de détermi-

ner la constante; mais seulement en prenant la différence des résultats que donnent les substitutions des valeurs $x=a$ et $x=b$, qui changent respectivement en $A+C$ et en $B+C$, l'expression $P+C$.

La valeur $x=a$, pour laquelle l'intégrale s'évanouit, en est l'origine; et l'on dit alors que l'*intégrale doit commencer lorsque* $x=a$. La valeur à laquelle on s'arrête, répondant à $x=b$, on dit en conséquence que l'*intégrale est complète lorsque* $x=b$.

Les deux valeurs $x=a$ et $x=b$ sont désignées en commun sous le nom de *limites de l'intégrale.*

Toute intégrale qu'on énonce sans fixer son origine ou sans indiquer ses limites, se nomme *intégrale indéfinie*, et doit, pour être *complète*, renfermer une *constante arbitraire.*

Lorsqu'on assigne ces limites, l'intégrale est *définie.* Si elles sont $x=a$ et $x=b$, par exemple, on dit alors que l'*intégrale* $\int X dx$ *doit être prise depuis* $x=a$ *jusqu'à* $x=b$; *et cela s'effectue en calculant successivement ce que devient l'expression variable de l'intégrale lorsque* $x=a$, *puis lorsque* $x=b$, *et en retranchant le premier résultat du second* : dans ce cas, il est inutile d'écrire à la suite de l'intégrale la constante arbitraire, puisqu'elle disparaîtrait par la soustraction.

Il est important de se familiariser avec ces expressions qui reviennent souvent, et que les considérations que je vais exposer rendront encore plus significatives.

210. Cela posé, la série de Taylor donnant lorsque x devient $x+h$,

$$y+\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

ne peut déterminer la valeur que prend dans cette circonstance une fonction dont on ne connaît que les coefficiens

ficiens différentiels, même à partir du premier ordre, puisque la valeur primitive y reste indéterminée, et représente parconséquent la constante arbitraire; mais la différence entre cette valeur et celle qui répond à $x+h$, ne dépendant que de la série

$$\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

est entièrement connue.

Si on fait $\int X dx = y$, on aura

$$\frac{dy}{dx}=X,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dX}{dx},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2X}{dx^2},\ \text{etc.}$$

les coefficiens différentiels seront tous déduits de la fonction donnée x, et il viendra

$$X\frac{h}{1}+\frac{dX}{dx}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Pour tirer de cette formule la valeur de $\int X dx$, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, il suffira de prendre $h=b-a$, et de remplacer x par a, dans la fonction X et ses coefficiens différentiels, que je représenterai alors par A, A', A'', etc. : on trouvera, entre les limites $x=a$, $x=b$,

$$\int X dx = A\frac{(b-a)}{1}+A'\frac{(b-a)^2}{1.2}+A''\frac{(b-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

La série précédente est, en général, d'autant plus convergente que l'intervalle $b-a$ est plus petit : mais lorsqu'il a une valeur trop considérable, on le partage en un nombre de parties assez grand pour former des intervalles suffisamment petits; et on calcule à part la valeur de l'intégrale relative à chacun de ces inter-

valles. Je suppose, afin de simplifier les formules, que la différence $b - a$ soit divisée en n parties égales à α, et que les quantités A, A', A'', etc. se changent respectivement en A_1, A_1', A_1'', etc. A_2, A_2', A_2'', etc. lorsqu'on y met $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, etc. au lieu de a; on aura d'abord, entre a et $a + \alpha$,

$$\frac{A\alpha}{1} + \frac{A'\alpha^2}{1.2} + \frac{A''\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

entre $a + \alpha$ et $a + 2\alpha$,

$$\frac{A_1\alpha}{1} + \frac{A_1'\alpha^2}{1.2} + \frac{A_1''\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

entre $a + 2\alpha$ et $a + 3\alpha$,

$$\frac{A_2\alpha}{1} + \frac{A_2'\alpha^2}{1.2} + \frac{A_2''\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

etc.

La somme de toutes ces séries, dont le nombre est n, composera la valeur totale de $\int Xdx$ entre les limites $x = a$, $x = b$, qui sera parconséquent ..(I)

$$\int Xdx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{1} \ (A + A_1 + A_2 \ldots\ldots + A_{n-1}) \\ + \frac{\alpha^2}{1.2} (A' + A_1' + A_2' \ldots\ldots + A'_{n-1}) \\ + \frac{\alpha^3}{1.2.3} (A'' + A_1'' + A_2'' \ldots\ldots + A''_{n-1}) \\ + \text{etc.} \end{array} \right.$$

211. Si on prenait α assez petit pour pouvoir se borner à sa première puissance, le résultat ci-dessus se réduirait à

$$\int Xdx = A\alpha + A_1\alpha + A_2\alpha \ldots\ldots + A_{n-1}\alpha,$$

série dont les différens termes ne sont autre chose que les valeurs successives de la quantité Xdx; lorsqu'on y substitue a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$, etc. à la place de x, et qu'on prend $dx=\alpha$. C'est sous ce point de vue que l'on conçoit l'intégrale $\int Xdx$ comme la somme d'un nombre infini d'élémens, égaux aux valeurs consécutives que prend la différentielle, par les divers changemens qu'éprouve la variable x. (Voyez la note de la page 202 de ce volume.)

Il est encore à remarquer que la somme de cette série, quelque grand que soit le nombre de ses termes, pourvu qu'ils aient tous le même signe, sera moindre que $n\alpha A_m$, si A_m désigne la plus grande des quantités A, A_1, A_2, ... A_{n-1}, et que le contraire aura lieu si A_m désigne la plus petite. On conclut de là que si la fonction X ne change pas de signe entre les limites $x=a$, $x=b$, et que M et m soient sa plus grande et sa plus petite valeur dans cet intervalle, l'intégrale $\int Xdx$, prise entre ces limites, sera $< M(b-a)$ et $> m(b-a)$.

212. La différence entre les deux valeurs de y, relatives à $x=a$ et $x=b$, peut aussi s'obtenir en partant de la dernière, par le moyen de la formule

$$y_{\prime}=y-\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

dans laquelle $y_{\prime}$ répond à $x-h$, ce qui donne

$$y-y_{\prime}=\frac{dy}{dx}\frac{h}{1}-\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}-\text{etc.}$$

Pour appliquer cette dernière à $\int Xdx$, il faut, dans X et dans ses coefficiens différentiels, changer x en b, et supposant qu'on en tire les quantités B, B', B'', etc.,

on trouvera entre les limites $x=a$, $x=b$,

$$\int X dx = \frac{B(b-a)}{1} - \frac{B(b-a)^2}{1.2} + \frac{B(b-a)^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

Lorsqu'on partage l'espace $b-a$ en n parties égales à α, on obtient par la formule ci-dessus, entre les limites $a+\alpha$ et a,

$$\frac{A_1\alpha}{1} - \frac{A'_1\alpha^2}{1.2} + \frac{A''_1\alpha^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

entre $a+2\alpha$ et $a+\alpha$

$$\frac{A_2\alpha}{1} - \frac{A'_2\alpha^2}{1.2} + \frac{A''_2\alpha^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

entre $a+3\alpha$ et $a+2\alpha$

$$\frac{A_3\alpha}{1} - \frac{A'_3\alpha^2}{1.2} + \frac{A''_3\alpha^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

etc.

la somme de ces séries, pareillement en nombre n, donne, entre les limites $x=b$, $x=a$, ... (II)

$$\int X dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{1}\,(A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots + A_n) \\ -\frac{\alpha^2}{1.2}\left(A'_1 + A'_2 + A'_3 \ldots\ldots + A'_n\right) \\ +\frac{\alpha^3}{1.2.3}\left(A''_1 + A''_2 + A''_3 \ldots\ldots + A''_n\right) \\ -\text{ etc.} \end{cases}$$

213. En réduisant cette dernière série aux termes affectés de la première puissance de α, on aurait seulement

$$\int X dx = A_1\alpha + A_2\alpha + A_3\alpha \ldots + A_n\alpha,$$

expression dont l'erreur serait en $+$, si celle de l'expression du n° précédent était en $-$, *et vice versâ*, pourvu toutefois que les quantités A, A_1, A_2, etc. fussent toutes de même signe et composassent une suite tout-à-fait croissante ou tout-à-fait décroissante.

On peut prouver la même chose des séries (I) et (II); mais je ne m'y arrêterai point ici : je me bornerai à observer qu'en conséquence de cette remarque, on prend pour plus d'exactitude la somme de ces dernières, et entre les limites $x=a$, $x=b$, on a la formule (III)

$$\int X\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{1} \quad [A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1} + \frac{1}{2}(A + A_n)] \\ + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{1}{2}\left(A' - A'_n\right) \\ + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\left[A''_1 + A''_2 + A''_3 \ldots + A''_{n-1} + \frac{1}{2}\left(A'' + A''_n\right)\right] \\ + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{2}\left(A''' - A'''_n\right) \\ + \text{etc.} \end{array} \right.$$

214. La considération des courbes conduit aussi d'une manière très-simple aux principales conséquences établies dans les articles précédens.

$\int X\mathrm{d}x$ exprimant l'aire du segment d'une courbe dont l'ordonnée est x (76), si BCZ, *fig.* 35, représente cette courbe, que l'origine des abscisses soit en A, et que $X=PM$, l'expression $X\mathrm{d}x$ sera aussi bien la différentielle des segmens BMP, $DEMP$, que du segment $ACMP$, qui commence à l'origine; ainsi l'ordonnée qui borne le segment de ce côté sera absolument indéterminée. L'ordonnée MP qui forme l'autre FIG. 35.

limite l'est pareillement, tant qu'on n'assigne aucune valeur à l'abscisse AP; mais lorsqu'on aura fixé les abscisses de la première et de la dernière ordonnée, le segment sera tout-à-fait déterminé.

Si la fonction variable P de l'intégrale $\int X dx = P + C$, s'évanouit d'elle-même au point B, cette fonction exprime immédiatement les aires BCA, BED, BMP; alors si on veut faire partir les segmens de l'ordonnée AC, il faut retrancher de ces aires, l'espace BCA: cet espace représente la constante, déterminée pour que la quantité $P + C$ s'évanouisse au point A; mais en considérant à-la-fois les deux limites d'un segment, il est inutile de s'occuper de la constante; car soit que l'on compte les aires à partir du point B ou du point A, sur l'axe des abscisses, le segment $DEMP$, par exemple, s'obtiendra également par la différence des segmens BMP, BED, ou par celle des segmens $ACMP$ et $ACED$.

215. L'inspection de la figure 35 fait voir que l'aire du segment d'une courbe quelconque est toujours comprise entre la somme d'une suite de rectangles inscrits PR, $P'R'$, $P''R''$, etc. et celle d'une suite de rectangles circonscrits $P'S$, $P''S'$, $P'''S''$, etc., les premiers construits sur la plus petite ordonnée de chacun des trapèzes curvilignes PM', PM'', PM''', etc. et les seconds sur la plus grande. Il est visible que si l'on prend

$$AP = a, \; PP' = P'P'' = P''P''', \text{ etc.} = \alpha,$$

on aura

$$PM = A, \; P'M' = A_1, \; P''M'' = A_2, \; P'''M''' = A_3, \text{ etc.}$$

la somme des rectangles inscrits sera

$$Aa + A_1a + A_2a + \text{etc.} \qquad (1)$$

et celle des rectangles circonscrits,

$$A_1a + A_2a + A_3a + \text{etc.} \qquad (2)$$

On verra facilement que la différence des rectangles inscrits aux rectangles circonscrits, est égale au rectangle $MRQN$, équivalent à la somme des rectangles MM', $M'M''$, $M''M'''$, etc., et que parconséquent cette différence peut être rendue aussi petite qu'on voudra, en rapprochant les ordonnées.

Dans la figure 35, où les ordomées vont toujours en croissant, les rectangles inscrits sont formés sur la première ordonnée de chaque trapèze curviligne, et les rectangles circonscrits sur la dernière; mais si elles passaient par un *maximum*, comme dans la figure 36, il n'en serait ainsi que dans la partie CM'', FIG. 36. antérieure à ce *maximum*, et le contraire aurait lieu dans la partie postérieure $M''Z$; alors la série (1), d'abord moindre que l'espace curviligne, deviendrait plus grande, et la série (2), d'abord plus grande que cet espace, deviendrait plus petite.

216. On approchera davantage de la vraie valeur du segment de la courbe proposée, en prenant, au lieu des rectangles inscrits et circonscrits, la somme des trapèzes terminés par les cordes des arcs MM', $M'M''$, $M''M'''$, etc.

Ces trapèzes ayant même hauteur PP', et chaque ordonnée, excepté la première, étant commune à deux trapèzes, leur somme sera précisément égale à la série

$$a\,[A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1} + \tfrac{1}{2}(A + A_n)],$$

qui tient le milieu entre les séries (1) et (2).

FIG. 37. Enfin il est évident, par la figure 37, que l'aire curviligne $PMNQ$ est $<$ que le rectangle QE, et $>$ que le rectangle PF, construits l'un sur la plus grande, et l'autre sur la plus petite des ordonnées comprises entre les limites AP et AQ de ce segment.

217. L'emploi de la formule (III) du n° 213 peut présenter quelques difficultés. Elle ne saurait servir lorsque la fonction X devient infinie ; et aux environs des valeurs de l'abscisse qui donne cette circonstance, il ne suffit pas de diminuer l'intervalle α, ou de resserrer les ordonnées, pour compenser l'effet de leur rapide accroissement : il faut encore avoir recours à des transformations convenables.

Soit, par exemple, $X=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; il est évident que lorsque x approche de l'unité, un très-petit changement dans la valeur de cette variable en produit un très-grand dans celle de X; si donc on demandait l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1-\delta$, δ étant une petite quantité, il faudrait, vers la dernière limite, multiplier beaucoup les valeurs intermédiaires données à x.

La même intégrale ne peut se calculer immédiatement jusqu'à $x=1$; car alors X devient infini, sans que pourtant la valeur de $\int Xdx$ le soit, puisque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{1-x}+const.$$

Cette difficulté tient à ce que, dans l'intégration, le facteur $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ passe du dénominateur au numérateur ; et elle aura lieu en général, lorsque X sera

de la forme $\frac{V}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ et qu'on aura $p<q$. Pour la lever, on fera $a-x=z^q$, ce qui donnera

$$x=a-z^q,\ \mathrm{d}x=-qz^{q-1}\mathrm{d}z \text{ et } X\mathrm{d}x=-qVz^{q-p-1}\mathrm{d}z,$$

quantité qui ne deviendra plus infinie quand $x=a$ ou $z=0$, si la fonction V reste finie dans cette circonstance; on calculera donc alors l'intégrale $\int Vz^{q-p-1}\mathrm{d}z$, depuis $z=0$ jusqu'à $z=\delta$, δ étant une quantité assez petite, et on aura ainsi la partie de la valeur de $\int\frac{V\mathrm{d}x}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ correspondante à l'intervalle compris entre $x=a$ et $x=a-\delta$.

On peut encore obtenir l'intégrale $\int\frac{V\mathrm{d}x}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$ depuis $x=a$ jusqu'à $x=a-\delta$, en faisant seulement $x=a-z$; parceque la petitesse de la variable z renfermée entre les limites très-étroites 0 et δ, permet de simplifier beaucoup le coefficient différentiel. Si on avait, par exemple, $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-x^4}}$, la différentielle à intégrer après la transformation indiquée, serait

$$\frac{-(a-z)^2\mathrm{d}z}{\sqrt{4a^3z-6a^2z^2+4az^3-z^4}}=\frac{-(a^2-2az+z^2)\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z}.\sqrt{4a^3-6a^2z+4az^2-z^3}}.$$

En réduisant la fraction

$$\frac{a^2-2az+z^2}{\sqrt{4a^3-6a^2z+4az^2-z^3}}$$

en série ordonnée suivant les puissances de z, et en

s'arrêtant au quarre de cette variable, on aurait enfin

$$-\int\frac{\mathrm{d}z\sqrt{a}}{\sqrt{z}}\left(1-\frac{5z}{4a}-\frac{5z^2}{23a^2}\right)=-\sqrt{az}\left(2-\frac{5}{6}\frac{z}{a}-\frac{1}{16}\frac{z^2}{a^2}\right).$$

Ce résultat, qui s'évanouit lorsque $z=0$, donnera, par la substitution de δ à z, la valeur de l'intégrale cherchée, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a-\delta$. Le reste de cette intégrale pourra se calculer par le moyen de la série du n° 213.

En général, des transformations que l'habitude de l'analyse peut seule suggérer, rendent ces séries applicables dans un très-grand nombre de cas qui paraissent d'abord se refuser à la méthode proposée.

218. L'intégrale $\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x}{x}$, ne pouvant s'obtenir par la réduction de $e^{-\frac{1}{x}}$ en série, que pour le cas où x serait très-grand, je vais montrer comment Euler en a calculé la valeur depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$, au moyen de la formule III du n° 213.

On peut d'abord changer

$$\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x}{x} \text{ en } \int x\frac{e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x}{x^2}=e^{-\frac{1}{x}}x-\int e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x;$$

la partie $e^{-\frac{1}{x}}x$, s'évanouit lorsque $x=0$, et il en est de même de la seconde partie $\int e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$, ainsi qu'on va le voir. On a pour cette intégrale

$$X=e^{-\frac{1}{x}},\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right), \text{ etc.}$$

Si on fait $x=0$, ces expressions s'évanouiront (58),

et parconséquent les quantités A, A', A'', etc. seront nulles : mettant ensuite α, 2α, 3α, etc. à la place de x, on obtiendra les valeurs de A_1, A_1', etc. A_2, A_2' ; et, depuis o jusqu'à $x = n\alpha$, on aura

$$\int e^{\frac{1}{x}} dx =$$

$$\frac{\alpha}{1}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}} + e^{-\frac{1}{2\alpha}} \ldots + e^{-\frac{1}{(n-1)\alpha}}\right] + \frac{1}{2}\frac{\alpha e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2}\frac{1}{n^2\alpha^2}$$

$$+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\left[e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^3}\right) + e^{-\frac{1}{2\alpha}}\left(\frac{1}{16\alpha^4} - \frac{2}{8\alpha^3}\right) + \ldots\right.$$

$$\left. + e^{-\frac{1}{(n-1)\alpha}}\left(\frac{1}{(n-1)^4\alpha^4} - \frac{2}{(n-1)^3\alpha^3}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\alpha^3 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3}\left(\frac{1}{n^4\alpha^4} - \frac{2}{n^3\alpha^3}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha^4 e^{-\frac{1}{n\alpha}}}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{n^6\alpha^6} - \frac{6}{n^5\alpha^5} + \frac{6}{n^4\alpha^4}\right)$$

$+$ etc.

Lorsqu'on veut s'arrêter à la limite $x = 1$, il faut faire $\alpha = \frac{1}{n}$, et il vient alors $\int e^{-\frac{1}{x}} dx =$

$$\frac{1}{n}\left[e^{-\frac{n}{1}} + e^{-\frac{n}{2}} + e^{-\frac{n}{3}} \ldots + e^{-\frac{n}{n-1}}\right] + \frac{1}{2ne} - \frac{1}{4n^2e}$$

$$+\frac{1}{6}\left[\frac{(n-2)}{1}e^{-\frac{n}{1}} + \frac{(n-4)}{16}e^{-\frac{n}{2}} + \frac{(n-6)}{81}e^{-\frac{n}{3}} \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{n-2n+2}{(n-1)^4}e^{-\frac{n}{n-1}}\right]$$

$$-\frac{1}{12n^3e} - \frac{1}{48n^4e} + \text{etc.}$$

En se bornant aux termes qui sont écrits, et faisant $n=10$, on trouvera, suivant Euler, la valeur de $\int e^{-\frac{1}{x}}dx$, à un millionième d'unité près, et on l'aura avec une exactitude vingt fois plus grande encore, si on prend $n=20$.

Les détails renfermés dans cet article et dans le précédent, suffisent pour montrer comment, avec le secours des transformations, et en calculant la valeur d'une intégrale en plusieurs parties, on parvient à en approcher, lorsque les séries qui l'expriment ne sont convergentes que pour un intervalle limité.

219. La série du théorême de Taylor donne aussi deux développemens généraux de l'intégrale $\int X dx$. En désignant par C la valeur de cette intégrale, quand $x=0$, et représentant par A, A', A'', etc. ce que deviennent alors les quantités X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, etc. on aura

$$\int X dx = C + A\frac{x}{1} + A'\frac{x^2}{1.2} + A''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

série dans laquelle C tient lieu de la constante arbitraire.

En partant de la valeur générale de $\int X dx$, que je représenterai par y, pour revenir à celle qui répond à $x=0$, et que C désigne, il est évident qu'il faut faire $h=-x$, dans la formule du n° 21, ce qui donnera

$$C = y - \frac{dy}{dx}\frac{x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

remettant dans cette équation, au lieu de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. leurs valeurs, et prenant celle de $\int X dx$, on aura

$$\int X dx = C + X\frac{x}{1} - \frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

la quantité C est encore ici la constante arbitraire.

L'intégration conduit aussi à ce développement. En effet, si on décompose la différentielle Xdx dans les deux facteurs X et dx, et qu'on intègre le second, on aura $\int X dx = Xx - \int x dX$; mais

$$\int x\, dX = \int \frac{dX}{dx}.x\, dx = \frac{1}{2}x^2\frac{dX}{dx} - \frac{1}{2}\int x^2\frac{d^2X}{dx},$$

$$\int x^2\frac{d^2X}{dx} = \int\frac{d^2X}{dx^2}.x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{3}\int x^3\frac{d^3X}{dx^2},$$

$$\int x^3\frac{d^3X}{dx^2} = \int\frac{d^3X}{dx^3}.x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\frac{d^3X}{dx^3} - \frac{1}{4}\int x^4\frac{d^4X}{dx^3},$$

etc.

mettant successivement pour $\int x dX$, $\int x^2\frac{d^2X}{dx}$, etc. leurs valeurs, il en résultera

$$\int X dx = X\frac{x}{1} - \frac{dX}{dx}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

et pour que l'expression de l'intégrale soit complète, il faudra ajouter une constante à ce développement, qui par là deviendra semblable au précédent. Cette série a été donnée pour la première fois par Jean Bernoulli, et elle porte son nom, comme celle du n° 21 porte celui de Taylor; l'une est à l'égard du Calcul intégral, ce que l'autre est par rapport au Calcul différentiel.

220. Jusqu'à présent je n'ai considéré que le coefficient différentiel du premier ordre ; mais si on ne

connaissait que le coefficient différentiel du second ordre, il faudrait alors deux intégrations successives pour remonter à la fonction primitive dont il tire son origine. Soit X le coefficient différentiel du second ordre de la fonction y, on aura $\frac{d^2y}{dx^2}=X$, et en multipliant les deux membres par dx, il viendra $\frac{d^2y}{dx}=Xdx$; or $\frac{d^2y}{dx}$ est la différentielle de $\frac{dy}{dx}$, prise en regardant dx comme constant: on aura donc $\frac{dy}{dx}=\int Xdx$. Si P représente la fonction primitive de x, égale à $\int Xdx$, et C la constante arbitraire, il viendra $\frac{dy}{dx}=P+C$; multipliant ensuite les deux membres par dx, on trouvera $dy=Pdx+Cdx$, et en intégrant, on obtiendra $y=\int Pdx+Cx+C'$, C' étant une seconde constante arbitraire. Si on remet $\int Xdx$, au lieu de P, il en résultera $y=\int dx\int Xdx+Cx+C'$, expression qui indique deux opérations successives.

On peut ramener cette expression à deux intégrales simples, au moyen de l'intégration par parties; car, en remettant P au lieu de $\int Xdx$, on aura

$$\int Pdx=Px-\int xdP=x\int Xdx-\int Xxdx,$$

et parconséquent

$$y=x\int Xdx-\int Xxdx+Cx+C'.$$

Je passe maintenant aux différentielles du troisième ordre. Soit X le coefficient différentiel de la fonction y, relatif à cet ordre; on aura $\frac{d^3y}{dx^3}=X$, d'où

$\frac{d^3y}{dx^3} = Xdx$; mais $\frac{d^3y}{dx^3} = d.\frac{d^2y}{dx^2}$; donc $\frac{d^2y}{dx^2} = \int Xdx + C$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx} = dx \int Xdx + Cdx$. En intégrant de nouveau, il viendra $\frac{dy}{dx} = \int dx \int Xdx + Cx + C'$, ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{dy}{dx} = x \int Xdx - \int Xxdx + Cx + C'.$$

On tire ensuite de là

$$dy = xdx \int Xdx - dx \int Xxdx + Cxdx + C'dx,$$

et en intégrant, on a

$$y = \int xdx \int Xdx - \int dx \int Xxdx + \tfrac{1}{2}Cx^2 + C'x + C'',$$

C'' étant la constante introduite par cette dernière intégration. Il est facile de voir que

$$\int xdx \int Xdx = \tfrac{1}{2}x^2 \int Xdx - \tfrac{1}{2}\int Xx^2dx$$
$$\int dx \int Xxdx = x \int Xxdx - \int Xx^2dx;$$

substituant donc ces valeurs, et réduisant entr'eux les termes semblables, on trouvera

$$y = \tfrac{1}{2}(x^2 \int Xxdx - 2x \int Xxdx + \int Xx^2dx) + \tfrac{1}{2}(Cx^2 + 2C'x + C'').$$

Voici comment on indique les intégrales successives: lorsque X désigne le coefficient différentiel du second ordre, on a $d^2y = Xdx^2$, et en prenant l'intégrale de chaque membre, on trouve $dy = \int Xdx^2$; puis en intégrant encore une fois, il vient $y = \int\int Xdx^2 = \int^2 Xdx^2$. On a de même, quand X est le coefficient différentiel du troisième ordre,

$$d^2y=\int Xdx^3,\ dy=\int\int Xdx^3;\ y=\int\int\int Xdx^3=\int^3 Xdx^3,$$

et ainsi de suite pour les ordres supérieurs.

Chaque différentiation n'introduisant que la première puissance de dx, on peut ne laisser que cette puissance sous les divers signes $\int$, ce qui fournit ces relations :

$$\int Xdx^2=dx\int Xdx,\quad \int\int Xdx^2=\int dx\int Xdx$$
$$\int Xdx^3=dx^2\int Xdx,\quad \int\int Xdx^3=\int dx^2\int Xdx=dx\int dx\int Xdx$$
$$\int\int\int Xdx^3=\int dx\int dx\int Xdx,\ \text{etc.}$$

où il faut observer que chaque signe $\int$ embrasse tous ceux qui le suivent.

Cela posé, en négligeant les constantes arbitraires, et en intégrant par parties, comme ci-dessus, on trouvera

$$\int Xdx=\int Xdx$$

$$\int^2 Xdx^2=\frac{1}{1}\ [x\int Xdx-\int Xxdx]$$

$$\int^3 Xdx^3=\frac{1}{1.2}\ [x^2\int Xdx-2x\int Xxdx+\int Xx^2dx]$$

$$\int^4 Xdx^4=\frac{1}{1.2.3}[x^3\int Xdx-3x^2\int Xxdx+3x\int Xx^2dx-\int Xx^3dx].$$

etc.

Les coefficiens numériques de ces expressions sont les mêmes que ceux des puissances du binome $a-b$; et tandis que l'exposant de x hors du signe $\int$ diminue d'une unité à chaque terme, en allant vers la droite, son exposant sous ce signe augmente de la même quantité.

On restituera les constantes arbitraires que j'ai omises dans cette formule, en écrivant $\int Xdx+C$ pour $\int Xdx$, $\int Xxdx+C'$ pour $\int Xxdx$, $\int Xx^2dx+C''$ pour $\int Xx^2dx$, et ainsi des autres : car les constantes

C,

C, C', C'', etc. étant affectées de diverses puissances de x, sont irréductibles entr'elles.

221. Les différentielles que j'ai traitées jusqu'ici, sont prises en regardant dx comme constant, parceque ce sont les seules qui ne renferment qu'un coefficient différentiel. En effet, lorsqu'on fait varier en même temps dx, on a (116) $d^2y = qdx^2 + pd^2x$; si donc on se proposait la différentielle $Udx^2 + Vd^2x$, il faudrait, pour qu'elle signifiât quelque chose, qu'on eût $V = p$ et $U = q$, d'où résulte $U = \frac{dV}{dx}$; et cette condition étant remplie, on n'aurait qu'à intégrer $\int V dx$. Il est facile d'étendre cette remarque aux différentielles d'un ordre quelconque.

Application du Calcul intégral à la quadrature des Courbes et à leur rectification, à la quadrature des Surfaces courbes et à l'évaluation des volumes qu'elles comprennent.

De la quadrature des Courbes.

222. Le problême général de la quadrature des courbes se réduit à l'intégration de la différentielle Xdx, en nommant X la fonction de x, qui exprime l'ordonnée y de la courbe proposée (76). Ce qui précède contient l'exposé des principales méthodes analytiques trouvées jusqu'à présent, pour effectuer cette intégration, soit rigoureusement, soit d'une manière approchée; il ne s'agit ici que de l'application de ces méthodes aux courbes les plus connues.

Celles dont l'équation est la plus simple sont les pa-

raboles des divers ordres, représentées par l'équation

$y^n = px^m$: on en tire $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$, et parconséquent

$$\int X dx = \int p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} + const.$$

Toutes ces courbes, comme on voit, sont *quarrables;* c'est-à-dire, qu'on a l'expression finie et algébrique de la surface du segment compris entre leur arc, l'axe des abscisses et l'ordonnée. Il est facile, avec l'expression de ce segment, de calculer celle de tout autre espace contenu entre une portion de la courbe et des lignes droites formant, avec les abscisses et les ordonnées, des polygones dont la Géométrie élémentaire donne la mesure; on en verra plus bas des exemples, (229, 230).

Les courbes proposées passent par l'origine des abscisses, puisqu'on a en même temps $x=0$, et $y=0$; si on veut exprimer leur aire, à partir de ce point, il faut supprimer la constante arbitraire, puisque l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ s'anéantit d'elle-même quand on y fait
FIG. 38. $x=0$. Pour avoir ensuite l'aire $BCMP$, *fig.* 38, comprise entre les ordonnées BC et PM, correspondantes aux abscisses $AB=a$ et $AP=x$, il suffira de retrancher de $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$, qui exprime l'aire $ACMP$, la quantité $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}}$ égale à l'aire ACB; et on aura ainsi

$$BCMP = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}\left(x^{\frac{m+n}{n}} - a^{\frac{m+n}{n}}\right).$$

Quand l'exposant n est pair, l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n}\, x^{\frac{m+n}{n}}$ est susceptible du double signe $\pm$, et comme alors les mêmes abscisses AP appartiennent à deux branches de courbes ACM et Acm, on a deux segmens $ACMP$ et $AcmP$; celui qui renferme les ordonnées positives a une valeur positive, et l'autre a une valeur négative.

Lorsque les exposans m et n sont impairs l'un et l'autre, la quantité $x^{\frac{m+n}{n}}$ n'a qu'un seul signe et reste toujours positive, quel que soit le signe de x; mais il est aisé de voir que dans ce cas l'une des deux branches de la courbe proposée a ses abscisses et ses ordonnées négatives en même temps : il suit donc de là que les aires correspondantes à des abscisses et à des ordonnées négatives doivent être regardées comme positives.

Si n seule est impaire, alors la quantité $x^{\frac{m+n}{n}}$ devient négative en même temps que x; mais dans ce cas les deux branches de la courbe proposée sont du même côté de la ligne des abscisses, et les ordonnées demeurent toujours positives.

En rapprochant ces remarques, on en conclura que *l'aire d'une courbe est positive quand l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe, et négative lorsque le contraire a lieu.*

Tous les segmens paraboliques ont un rapport constant avec le rectangle $ADMP$, formé sur l'abscisse et sur l'ordonnée ; car l'expression

$$\frac{n}{m+n}p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m+n}{n}}=\frac{n}{m+n}x.p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}$$

équivaut à $\frac{n}{m+n}xy$, en vertu de l'équation $y=p^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}$.

Lorsque $n=m$, la parabole devient une ligne droite, puisqu'on a $y=p^{\frac{1}{n}}x$; le segment *ACMP* se change dans le triangle *AMP*, dont la valeur est par la formule ci-dessus, comme par la Géométrie élémentaire, égale à $\frac{1}{2}xy$.

En faisant $n=2$ et $m=1$, on tombe sur le cas de la parabole ordinaire, et on trouve $\frac{2}{3}xy$ pour la valeur du segment *ACMP*.

223. Je vais chercher maintenant la valeur du segment des courbes représentées par l'équation $x^m y^n = p$. Cette équation se tire de $y^n = px^m$, en y changeant $+m$ en $-m$; on a $y=p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$ et

$$\int X\mathrm{d}x=\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}}+const.$$

Les courbes proposées sont les hyperboles des divers ordres, rapportees à leurs asymptotes, et sont composées de plusieurs branches telles que *UMV*,
FIG. 39. *fig.* 39, inscrites dans les angles que forment ces droites. En comptant les segmens de l'origine des abscisses, ils renferment l'espace indefini qui se trouve entre la partie *CV* de la courbe et son asymptote *AY* ; la valeur de cet espace est infinie ou finie, selon que *m*

est plus grande ou moindre que n. En effet, pour avoir l'espace $BCMP$, pris depuis l'abscisse $AB = a$, jusqu'à l'abscisse $AP = b$, il faut (209) faire successivement $x = a$ et $x = b$ dans l'expression $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}}$, et retrancher le premier résultat du second; on aura donc $BCMP = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}}\right)$. Si maintenant on suppose $a = 0$, le point B tombera sur le point A et l'espace $BCMP$ se changera en $YAPM$; or la quantité $a^{\frac{n-m}{n}}$ sera infinie ou nulle, selon qu'on aura $m >$ ou $< n$: dans le premier cas,

$$YAPM = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n}\left(\frac{1}{0} - b^{\frac{n-m}{n}}\right),$$

et dans le second

$$YAPM = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}} - 0\right) = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} b^{\frac{n-m}{n}}.$$

Laissant a d'une grandeur déterminée, et faisant b infini, on aura alors l'espace indéfini $XBCU$, qui sera infini si m est moindre que n, et qui sera égal à $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n} a^{\frac{n-m}{n}}$, si m surpasse n. Il résulte de là que quand m et n sont inégaux, des deux espaces asymptotiques, l'un est infini et l'autre fini.

La raison de cette différence se trouve dans le plus ou moins de rapidité avec laquelle la courbe s'approche de

son asymptote ; et puisque $y=\frac{p^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$ et $x=\frac{p^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{n}{m}}}$, il est facile de voir que quand on a $m>n$, y décroît beaucoup plus vîte que x, que parconséquent la courbe s'approche beaucoup plus rapidement de l'asymptote parallèle aux abscisses, que de celle qui est parallèle aux ordonnées, et *vice versâ*.

En mettant y au lieu de $p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}}$, dans l'expression

$$\frac{np^{\frac{1}{n}}x}{n-m}x^{\frac{n-m}{n}}=\frac{n}{n-m}x.p^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{m}{n}},$$

elle deviendra $\frac{n}{n-m}xy$, et la valeur de l'aire $YAPMV$ sera $\frac{nxy}{n-m}+$ *const.* Il semblerait que le terme $\frac{nxy}{n-m}$ doit s'évanouir lorsqu'on fait $x=0$; mais ce qui précède prouve la nécessité de ne rien prononcer à cet égard, avant d'avoir substitué pour y sa valeur en x.

224. Quand $n=m$, on a $xy=p^{\frac{1}{n}}$, ou $xy=p$, en changeant $p^{\frac{1}{n}}$ en p, ce qui est indifférent ; la courbe dont il s'agit dans ce cas est l'hyperbole ordinaire, et équilatère si l'angle des coordonnées est droit. L'expression générale de l'aire, trouvée au n° précédent, se présente alors sous une forme infinie, quel que soit x, et la différentielle de cette expression étant $\frac{pdx}{x}$, a, pour intégrale, $plx+$ *const.* Les espaces asympto-

tiques sont infinis l'un et l'autre, car l.x devient tel par la supposition de $x=0$ et par celle de x infinie.

Soit $p=a^2$, et UMV, *fig.* 40, une des branches de l'hyperbole équilatère dont la *puissance* est égale à a, AC son axe; en abaissant du sommet C la perpendiculaire BC, on aura $AB=a$; et comme l'aire $BCMP=a^2\text{l}.AP-a^2\text{l}.AB=a^2\text{l}.\frac{AP}{AB}$, si on prend AB pour l'unité, il viendra, à cause de $\text{l}.1=0$, $BCMP=\text{l}.AP$. On aura de même $\text{l}.AP'=BCM'P'$, $\text{l}.AP''=BCM''P''$, etc. d'où il suit que si les abscisses AP, AP', AP'', etc. sont en progression par quotiens, les aires correspondantes $BCMP$, $BCM'P'$, $BCM''P''$, etc. seront en progression par différences. FIG. 40.

225. L'hyperbole que je viens de considérer étant équilatère n'a donné que les logarithmes népériens; mais en variant l'angle des asymptotes et prenant toujours $AB=1$, on peut obtenir une infinité d'autres systèmes de logarithmes. Soit UMV, *fig.* 41, une hyperbole quelconque; menant les ordonnées PM, parallèles à l'asymptote AY, on prouvera, par des raisonnemens analogues à ceux du n° 76, que le parallélogramme $PMRP'$ est la différentielle de $BCMP$. Or si on mène $P'Q$ perpendiculaire sur PM, on trouvera $P'Q=PP'.\sin P'PQ=PP'.\sin XAY$; désignant par ω l'angle des asymptotes, on aura $P'Q=\text{d}x\sin\omega$, et parconséquent $PMRP'=y\text{d}x\sin\omega$. Si on met pour y sa valeur $\frac{1}{x}$, il en résultera $\frac{\text{d}x}{x}\sin\omega$ pour la différentielle de l'aire $BCMP$; et parconséquent $BCMP=\text{l}x=\text{l}.AP$, en prenant $\sin\omega$ pour module (27). FIG. 41.

Celui des logarithmes ordinaires étant 0,4342945 (29), on a $\sin\omega=0,4342945$, d'où il suit que les

asymptotes de l'hyperbole dont les aires donnent les logarithmes ordinaires, font entr'elles un angle de 0q,28801.

FIG. 42. 226. En faisant $AC=a$, $AP=x$ et $PN=y$, *fig.* 42, l'équation du cercle ANE sera $y^2=2ax-x^2$; et la différentielle de son segment ANP aura pour expression $dx\sqrt{2ax-xx}$, qui se transforme en $-du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}$ lorsqu'on fait $x=a-u$, puis se ramène à $du(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}}$, ou $\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$, par la formule ($B$) du n°171, et dont l'intégrale est

$$-\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx}+\tfrac{1}{2}a^2.\text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right),$$

lorsqu'on remet pour u sa valeur, résultat qui s'évanouit par la supposition de $x=0$.

Il est facile de reçonnaître, dans la partie

$$\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-xx},$$

l'expression de la surface du triangle PCN, et de voir parconséquent que

$$\tfrac{1}{2}a^2.\text{arc}\left(\cos=\frac{a-x}{a}\right) \text{ ou } \tfrac{1}{2}AC.\text{arc } AN$$

est la valeur du secteur ACN.

En supposant $x=2a$, dans l'expression APN, elle devient $\frac{1}{2}a^2.\text{arc}\ (\cos=-1)=\frac{1}{2}a^2\pi$, en désignant par π la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1; et elle appartient alors au demi-cercle : on aura donc le cercle entier $a^2\pi=\frac{1}{2}a.2a\pi$, ainsi qu'on le prouve dans les Elémens de Géométrie.

Le développement de $\int dx\sqrt{2axx-xx}$, trouvé dans le n° 179, donne des valeurs approchées de l'aire APN.

227. L'ordonnée de l'ellipse étant $\frac{b}{a}\sqrt{2ax-xx}$, le segment elliptique AMP sera égal à $\frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax-xx}$; et comme il est nul en même temps que le segment circulaire ANP, on aura $ANP : AMP :: a : b$; car il est facile de conclure du n° 209, que quand deux différentielles sont dans un rapport constant, ce rapport est aussi celui des intégrales, si ces intégrales sont nulles en même temps.

D'après ce qui précède, l'aire du cercle décrit sur le grand axe d'une ellipse, pris pour diamètre, étant à l'aire de cette courbe, comme le grand axe est au petit, celle-ci est équivalente au cercle décrit sur un rayon moyen proportionnel entre les moitiés de ces axes. En effet, par le rapport ci-dessus, l'aire de l'ellipse est $\pi a^2 \times \frac{b}{a}$ ou πab, et cette dernière quantité représente évidemment l'aire du cercle dont le rayon serait $\sqrt{ab}$.

228. L'hyperbole rapportée à son axe transverse a pour équation

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2),$$

et on en conclut

$$AQR=\frac{b}{a}\int dx\sqrt{2ax+x^2}.$$

Cette intégrale peut s'obtenir par les logarithmes (161) ou se développer en série; mais au lieu de m'arrêter à calculer ces résultats, je m'occuperai des secteurs elliptiques et des secteurs hyperboliques, dont les expressions différentielles se présentent souvent.

229. Soit $ABab$, *fig.* 42, une ellipse dont le demi-grand axe $AC=a$, le demi-petit axe $BC=b$; faisant $CP=x$, il vient FIG. 42.

$$PM = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Il est évident que le secteur

$$ACM = CMP + AMP,$$

et que

$$d.ACM = d.CMP + d.AMP,$$

$$CMP = \frac{1}{2}CP \times PM = \frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$d.CMP = \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(dx\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right),$$

$$d.AMP = -\frac{b}{a}dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

La dernière de ces différentielles est affectée du signe — parceque l'aire AMP décroît lorsque x augmente; et elles donnent

$$d.ACM = -\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Si on fait $\frac{b}{a} = 1$, le secteur elliptique ACM se changera dans le secteur ACN, appartenant au cercle $AEae$ décrit sur le grand axe Aa comme diamètre ; on aura donc

$$d.ACN = -\frac{1}{2}\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}a \times -\frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

mais $-\frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ étant la différentielle de l'arc AN, il en résulte, ainsi que de la Géométrie élémentaire,

$$ACN = \frac{1}{2}a \times AN = \frac{1}{2}AC \times AN,$$

et puisque les secteurs ACN et ACM ont leur origine

commune au point A, on en conclura (228) que le secteur elliptique

$$ACM=\frac{b}{a}ACN=\frac{1}{2}BC\times AN.$$

230. Dans l'hyperbole XAx décrite sur les mêmes axes que l'ellipse $ABab$, et dont l'équation est

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

le secteur $ACR=CQR-AQR$, ce qui donne

$$\mathrm{d}.ACR=\mathrm{d}.CQR-\mathrm{d}AQR;$$

et comme

$$CQR=\frac{1}{2}CQ\times QR=\frac{1}{2}\cdot\frac{bx}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

$$\mathrm{d}.AQR=\frac{b}{a}\mathrm{d}x\sqrt{x^2-a^2},$$

on aura

$$\mathrm{d}.ACR=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\frac{a^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

d'où on voit que la différentielle du secteur hyperbolique est, aux signes près, la même que celle du secteur elliptique.

231. Le secteur hyperbolique ACM, *fig.* 41, est égal à l'espace asymptotique $BCMP$; car FIG. 41.

$$ACM=BCMP+ABC-AMP,$$

et

$$ABC=\frac{AB\times BC\times \sin B}{2}=\frac{AP\times PM\times \sin B}{2}=AMP.$$

232. Ce qui précède suffit pour faire voir comment le calcul intégral s'applique à la quadrature des courbes ; cependant je ne puis quitter ce sujet sans donner quelques-uns des résultats intéressans

auxquels les Géomètres sont parvenus, par rapport aux courbes transcendantes.

Dans la Logarithmique, dont l'équation est $y = lx$, on a $\int y dx = \int dx lx = x lx - x + const.$ (182). La partie variable de cette expression devient nulle lorsque $x=0$; car en faisant $x = \frac{1}{m}$, elle prend la forme $-\frac{lm}{m} - \frac{1}{m}$, sous laquelle elle est nulle quand m est infinie (58) : il est donc inutile, d'après cela, de lui ajouter une constante ; lorsqu'on veut avoir les segmens à partir du
FIG. 43. point A, *fig.* 43.

En y faisant $x = AE = 1$, elle donne l'expression de l'espace asymptotique $cAEx$, qui est fini et égal à -1.

Si on prend les ordonnées à la place des abscisses, on aura $\int x dy = \int dx = x$, pour l'espace $cOMX$, appuyé sur l'axe des ordonnées AC, et dont l'expression est algébrique; je n'y ai point ajouté de constante, parcequ'elle s'évanouit en même temps que x. L'espace $cAEx$, qui répond à $x = AE = 1$, a, par cette formule, la même valeur que par la précédente, abstraction faite du signe.

J'ai supposé le module égal à l'unité; s'il était désigné par M, on aurait

$$\int dx lx = x lx - \int M dx = x lx - Mx \text{ et } \int x dy = Mx.$$

233. L'équation de la cycloïde étant

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \text{ (102),}$$

il vient

$$\int y dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

il serait facile d'intégrer cette expression, par les arcs de cercle ; mais on peut arriver à un résultat plus simple en faisant $2a-y=z$, ce qui donne

$$dy=-dz,\quad dx=-\frac{(2a-z)\,dz}{\sqrt{2az-z^2}}.$$

En effet, z représentant l'ordonnée QM, *fig.* 44, prise sur la ligne CK, la différentielle de l'aire $ACQM$ aura pour expression FIG. 44.

$$zdx=-\frac{(2az-z^2)dz}{\sqrt{2az-z^2}}=-dz\sqrt{2az-z^2};$$

donc

$$ACQM=-\int dz\sqrt{2az-z^2}+const.$$

En C, où $z=2a$, l'intégrale $\int dz\sqrt{2az-z^2}$ est égale à la surface du demi-cercle générateur gmq, et elle s'évanouit au point K, où $z=0$; parconséquent l'espace ACK est égal au demi-cercle $gmqg$. Pour un point quelconque Q, $\int dz\sqrt{2az-z^2}$ donnera l'aire du segment gmn correspondant à $gn=QM$, et on aura

$$ACQM=gmqg-gmn,\quad KMQ=ACK-ACQM=gmn.$$

Le rectangle AK ayant sa hauteur $IK=gq$ et sa base $AI=gmq$, sera quadruple du demi-cercle $gmqg$; et retranchant de ce rectangle, l'espace $ACK=gmqg$, il restera $AMKI=3.gmqg$. Il suit de là que l'espace $AKLA$, compris entre une branche de la cycloïde et son axe, est triple du cercle générateur.

234. Il me reste à parler des spirales; je vais m'occuper d'abord de celles que représente l'équation $u=at^n$ (104), dans laquelle t est égal à l'arc ON, *fig.* 45, FIG. 45. et $u=AM$. Les coordonnées étant polaires, la diffé-

rentielle de l'aire sera $\frac{u^2 dt}{2}$ (111) ; mettant pour u sa valeur, et intégrant, il viendra $\frac{a^2 t^{2n+1}}{4n+2} + const.$ mais on doit négliger la constante lorsque l'on compte les aires à partir de la ligne AO, sur laquelle $t=0$, et parconséquent la surface $ACM = \frac{a^2 t^{2n+1}}{4n+2}$. Après une révolution du rayon vecteur, on aura l'espace $ACMB = \frac{a^2 . (2\pi)^{2n+1}}{4n+2}$, π étant la demi-circonférence du cercle ON; puis le rayon décrivant reviendra dans la direction AM, et déterminera l'espace $ACMBC'M' = a^2 \frac{(2\pi + ON)^{2n+1}}{4n+2}$, et ainsi de suite.

Dans la spirale d'*Archimède* (104), $a = \frac{1}{2\pi}$, $n=1$ et $ACM = \frac{t^3}{24\pi^2}$, résultat qui, lorsqu'on y fait $t=2\pi$, donne $ACMB = \frac{\pi}{3}$.

Dans la spirale hyperbolique, où $n=-1$, on trouve

$$ACM = -\frac{a^2}{2t} + const.$$

L'aire de cette courbe, qui fait autour du point A une infinité de révolutions, est infinie lorsque $t=0$: on se conduira donc ici comme pour les hyperboles, et l'aire comprise entre les deux rayons vecteurs correspondans à $t=b$ et à $t=c$, sera

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right).$$

Dans la spirale logarithmique enfin (114), $t = lu$, $dt = \frac{du}{u}$; et la différentielle $\frac{u^2 dt}{2}$ devenant $\frac{u\,du}{2}$,

donne $ACM = \frac{u^2}{4}$. L'aire est nulle quand $u=0$, mais alors t est infini; car la courbe proposée fait, comme la précédente, une infinité de révolutions autour du pôle A.

235. La différentielle de l'arc d'une courbe rapportée à des coordonnées perpendiculaires entr'elles, est exprimée par $\sqrt{dx^2+dy^2}$ (75); en y substituant, au lieu de dy^2, sa valeur tirée de l'équation différentielle de la courbe proposée, elle prendra la forme Xdx, et son intégrale donnera la longueur de l'arc de cette courbe. Demander la longueur de l'arc d'une courbe, c'est demander sa *rectification*, parceque la solution de ce problême, lorsqu'elle s'obtient exactement, met en état d'assigner une ligne droite qui soit égale à l'arc dont il s'agit.

236. Je prends pour premier exemple les paraboles des divers degrés, représentées par l'équation $y=px^n$, n étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire: il vient

$$dy = npx^{n-1}dx, \quad \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+n^2p^2x^{2n-2}};$$

l'arc parabolique sera donc exprimé par

$$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx.$$

Cette intégrale s'obtiendra sous une forme finie et algébrique, lorsque l'exposant $2n-2$ sera égal à l'unité ou s'y trouvera contenu un nombre exact de fois (169).

Soit d'abord $2n-2=1$, il en résultera $n=\frac{3}{2}$, et

$$\int(1+n^2p^2x^{2n-2})^{\frac{1}{2}}dx = \frac{8}{27p^2}\left(1+\frac{9}{4}p^2x\right)^{\frac{3}{2}} + const.$$

la courbe proposée sera donnée par l'équation $y=px^{\frac{3}{2}}$, ou $y^2=p^2x^3$, et sera parconséquent la meme que la parabole du troisième ordre, qui est la développée de la parabole ordinaire (99). Si on compte les arcs à partir du point où $x=0$, on aura

$$\frac{8}{27p^2}\left[\left(1+\frac{9}{4}p^2x\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

En faisant successivement $2n-2=\frac{1}{2}$, $=\frac{1}{3}$, etc. il viendra $n=\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$ etc. ce qui montre que les paraboles représentées par les équations $y^4=p^4x^5$, $y^6=p^6x^7$ etc. sont rectifiables; à l'égard des autres on ne peut obtenir leurs arcs que par approximation.

Pour la parabole ordinaire, dans laquelle $n=2$, on a $\int dx(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}$: par la formule ($B$) du n° 171, on trouve

$$\int dx\,(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}};$$

et comme

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+4p^2x^2}}=\frac{1}{2p}(\mathrm{l}2px+\sqrt{1+4p^2x^2})+const.(162),$$

il en résultera

$$\int dx(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}x(1+4p^2x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2p}\mathrm{l}(2px+\sqrt{1+4p^2x^2})+const.$$

Telle est la valeur d'un arc quelconque de la parabole ordinaire; on peut y supprimer la constante, en faisant commencer l'intégrale lorsque $x=0$.

L'arc des hyperboles données par l'équation $y=px^{-n}$, a pour expression $\int x^{-n-1}dx\,(x^{2n+2}+n^2p^2)^{\frac{1}{2}}$, et ne peut s'obtenir que par approximation.

237.

237. La différentielle de l'arc de cercle est $\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, lorsqu'on part de l'équation $y^2=a^2-x^2$ (75), et $\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$, quand on emploie l'équation $y^2=2ax-x^2$; sous l'une et l'autre de ces formes, son intégrale ne peut s'obtenir que par approximation, et j'en ai déjà donné plusieurs développemens (179).

238. Je passe à l'ellipse, et je prends pour équation de cette courbe $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; la différentielle de son arc sera $\frac{dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$: faisant pour plus de simplicité le grand axe $a=1$, et le quarré de l'excentricité $a^2-b^2=1-b^2=e^2$, l'arc deviendra $\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. Déjà, dans le n° 180, j'ai rapporté une série qui donne la valeur approchée de cette intégrale, lorsque e est très-petit, et qui conviendra aux ellipses peu aplaties.

En supposant $x=1$ dans cette série, et mettant $\frac{\pi}{2}$ à la place de l'arc A qui est alors de 1^q, il vient

$$\frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}e^4-\frac{1.1.1.3\ 3.5}{2.2.4.4.6.6}e^6-\text{etc.}\right),$$

développement très-convergent lorsque e est une petite fraction.

239. La différentielle de l'arc elliptique s'exprime d'une manière très-simple, au moyen de l'arc qui lui
FIG. 42. correspond dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Soit $EN=\varphi$, *fig.* 42, on aura

$$CP = x = \sin\varphi, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi,$$

et parconséquent

$$d.BM = d\varphi\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}.$$

240. L'équation de l'hyperbole étant

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

on a $\frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a\sqrt{x^2-a^2}}$ pour la différentielle de son arc; faisant $a=1$, $a^2+b^2=1+b^2=e^2$, cet arc se trouve exprimé par $\int\frac{dx\sqrt{e^2x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ et peut, dans le cas où e est très-près de l'unité, se développer en série par un procédé analogue à celui du n° 180.

241. Il me reste à parler des courbes transcendantes. L'équation de la cycloïde étant

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}} \text{ (102)},$$

on en tire

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dy\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-y}},$$

différentielle dont l'intégrale est

$$= -2\sqrt{2a(2a-y)} + const.$$

Mais il est évident que $\sqrt{2a(2a-y)}$ est l'expression de la corde mg, *fig.* 44, du cercle générateur ; et comme la partie variable de l'intégrale s'évanouit au point K où $y=2a$, il s'ensuit qu'elle exprime l'arc MK; on a donc $MK=2mg$, $AK=2qg$, et parconséquent $AM=AK-MK=2(gq-mg)$: ces résultats s'accordent avec celui du n° 103. FIG. 44.

242. Pour donner un exemple de l'usage de la formule $\sqrt{u^2dt^2+du^2}$, qui exprime la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée aux coordonnées polaires, (110), je prendrai les spirales dont l'équation est $u=at^n$: et j'aurai à intégrer la différentielle

$$dt\sqrt{a^2t^{2n}+n^2a^2t^{2n-2}}=at^{n-1}dt\,(t^2+n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque $n=1$, on a seulement $adt\,(t^2+1)^{\frac{1}{2}}$, différentielle de la même forme que celle de l'arc de la parabole ordinaire (236); d'où il suit que c'est à la rectification de cette courbe que se rapporte celle de la spirale d'Archimède.

Dans la spirale logarithmique on a $t=lu$, ce qui donne

$\sqrt{u^2dt^2+du^2}=du\sqrt{2}$; l'arc de cette courbe a donc pour expression $u\sqrt{2}+$ *const.* ou seulement $u\sqrt{2}$, en partant de l'origine des rayons vecteurs; et on voit que quoiqu'il se trouve entre cette origine et un point quelconque de la courbe, une infinité de révolutions elles ne composent cependant qu'une longueur finie, égale à la diagonale du quarré fait sur le rayon vecteur.

De la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, et de la quadrature de leurs aires; de la rectification des courbes à double courbure.

243. Les surfaces courbes que les Géomètres ont considérées les premières, sont celles de révolution, parceque les différentielles de leurs aires et des volumes qu'elles comprennent ont une expression plus simple que leurs analogues dans les surfaces courbes en général.

Soit u le volume du corps engendré par le segment
FIG. 46. AMP, *fig.* 46, d'une courbe quelconque AZ, tournant autour de l'axe AB pris dans son plan, il est évident que ce volume terminé par le plan circulaire décrit par l'ordonnée MP, est une fonction de l'abscisse $AP=x$. Si on prend une autre abscisse AP', que l'on mène une seconde ordonnée $M'P'$ et les droites MR et SM', parallèles à PP', on verra que le volume u s'accroît de celui que décrit le trapèze curviligne $PMM'P'$, en tournant autour de PP', et que ce dernier corps, compris entre les cylindres engendrés par les rectangles MP' et $M'P$, diffère d'autant moins de l'un et de l'autre que les points M et M' sont plus rapprochés, ensorte que la limite des rapports de ces trois corps est l'unité; on peut donc, lorsqu'il s'agit de limites, prendre le cylindre décrit par MP', pour le corps engendré par $PMM'P'$. Ce cylindre ayant pour base le cercle décrit par le rayon $PM=y$, son volume sera $\pi y^2 \times PP'$, en nommant π le rapport de la circonférence au diamètre; et on trouvera, par le raisonnement du n° 76, que $\frac{du}{dx}=\pi y^2$, d'où $u=\pi\int y^2 dx$. Lors donc qu'on aura

l'équation de la courbe AMZ, on substituera pour y sa valeur en x, et l'intégration fera connaître le volume d'un segment quelconque du corps engendré par cette courbe.

244. Pour trouver la différentielle de l'aire du même corps, il faut observer que son accroissement, où l'aire décrite par l'arc MOM' qui s'approche sans cesse de sa corde MM', tend à se confondre avec l'aire du tronc de cône droit décrit par cette corde; et en passant aux limites, on peut prendre l'un pour l'autre. Mais l'aire du tronc du cône droit décrit par MM', aura pour expression

$$\tfrac{1}{2}MM'(2\pi MP+2\pi M'P')$$
$$=\pi MM'(MP+M'P');$$

et en la comparant à l'accroissement de l'abscisse PP', on obtiendra

$$\pi\frac{MM'}{PP'}(MP+M'P');$$

or en passant aux limites, $M'P'$ se confond avec MP ou y, et $\frac{MM'}{PP'}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$ (75) : donc le coefficient différentiel de l'aire décrite par l'arc AM est égal à

$$2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

et parconséquent $2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$ est la différentielle de cette aire.

On parvient sur-le-champ à cette expression, ainsi qu'à celle du n° précédent, en regardant la courbe AMZ

comme un polygone ; car alors l'élément du volume est le cylindre décrit par le rectangle MP', celui de l'aire est le tronc de cône décrit par le côté MM'.

245. J'insisterai peu sur les applications*, qui n'ont par elles-mêmes aucune difficulté. Si on prend l'équation à l'ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, on trouvera que le volume du corps qu'elle engendre en tournant autour de son grand axe, ou *l'ellipsoïde alongé*, est égal à $\frac{4\ ab^2}{3}$, puisqu'un segment de ce corps a pour expression

$$\int \frac{\pi b^2}{a^2}(2ax - x^2)\mathrm{d}x = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + const. \ (243).$$

Quand $a = b$, le corps proposé devient une sphère, et l'expression de son volume est $\frac{4\pi a^3}{3}$, ainsi qu'on le trouve par la Géométrie élémentaire.

Si l'ellipse était rapportée à son centre, ou qu'on employât l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, on aurait le même résultat, en observant que pour embrasser le corps entier, il faudrait prendre l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = -a$. Le volume du segment serait alors

$$\int \frac{\pi b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{\pi b^2}{3a^2}(3a^2x - x^3) + const.$$

et on aurait

$$\int \frac{2\pi b\mathrm{d}x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2}$$

pour l'expression de son aire. Cette intégrale se rapporte facilement à l'aire du segment circulaire dont l'abcisse est x et le rayon $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$; lorsqu'on suppose $a=b$, elle se réduit à

$$\int 2\pi a dx = 2\pi ax + const.$$

et donne, en la prenant depuis $x=a$, jusqu'à $x=-a$, $4\pi a^2$ pour l'aire totale de la sphère.

246. Je considère maintenant les surfaces courbes en général, en les rapportant à trois plans perpendiculaires entr'eux, au moyen des trois coordonnées $AP=x$, $PM'=y$, $M'M=z$, *fig.* 47. FIG. 47.

Le segment $APGMM'Q$, ayant sa base $AMPQ$ sur le plan des x, y, et terminé par les deux plans $PM'MG$, $QM'MH$, respectivement parallèles à ceux des y, z, et des x, z, et par la surface courbe proposée, est nécessairement une fonction des deux variables indépendantes x et y; il peut s'étendre successivement dans le sens de chacune, ou varier par rapport à toutes deux simultanément. En effet, si on suppose que y demeurant constant, x se change en $AP+Pp$, ce segment s'accroîtra de la tranche $PGMM'm'mpg$, et de la tranche $QHMM'n'nqh$, si l'on fait varier y seul de Qq: enfin, si x et y deviennent simultanément $AP+Pp$, $AQ+Qq$, le même segment aura alors pour limites les plans $pN'Ng$, $qN'Nh$, et différera de son état primitif par les deux tranches déja énoncées, et par le prisme $M'm'N'n'nMmN$, qui n'est autre que l'accroissement de la première tranche, lorsqu'on y fait varier y seul, et celui de la seconde quand, dans cette dernière, on fait varier x seul.

Pour abréger je désignerai respectivement par Pm, Qn et $M'N$, les deux tranches et le prisme dont je viens de parler; puis je représenterai par u la fonction de x et de y qui exprime le volume du segment $APGMM'Q$. Cela posé, le coefficient différentiel $\frac{du}{dx}$, relatif à la variable x, donnant la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de cette variable, sera égal à la limite du rapport de la tranche Pm à l'accroissement Pp de l'abscisse. Si on fait ensuite varier y seul ou AQ, ce qui changera Pm en $Pm+M'N$, le rapport $\frac{Pm}{Pp}$, s'accroîtra de la quantité $\frac{M'N}{Pp}$; et le rapport de cette dernière avec l'accroissement Qq de y, aura évidemment pour limite $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$ ou $\frac{d^2u}{dxdy}$: on connaîtra donc ce coefficient différentiel, si on parvient à déterminer, en fonction des variables x et y, la limite de $\frac{M'N}{\overline{Pp}\times\overline{Qq}}$. Or le prisme $M'N$ tend sans cesse vers le parallélépipède formé sur la base $M'm'N'n'$ et l'ordonnée MM', et peut en approcher aussi près qu'on voudra; mais en prenant l'un pour l'autre, puisqu'il s'agit de limites, on substitue $\overline{M'm'}\times\overline{M'n'}\times\overline{M'M}$, au prisme $M'N$; et comme $M'm'=Pp'$, $M'n'=Qq'$, le rapport $\frac{M'N}{\overline{Pp}\times\overline{Qq}}$ se réduit à $M'M=z$. Il résulte de là que $\frac{d^2u}{dxdy}=z$; et que pour obtenir le segment $APGMM'Q$, il faut, par l'intégration, remonter du coefficient différentiel $\frac{d^2u}{dxdy}$ à la fonction u.

247. Quoique le coefficient différentiel $\frac{d^2u}{dxdy}$ soit relatif à deux variables, on peut néanmoins parvenir à la fonction dont il dérive, par les méthodes données pour l'intégration des fonctions d'une seule, parceque chacune de ces variables est regardée comme constante à son tour. En effet, à cause de $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$ on aura $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}dy = zdy$; et prenant l'intégrale de chaque membre, en ne considérant comme variable que y seul, il viendra $\frac{du}{dx} = \int zdy$, d'où on tirera

$$\frac{du}{dx}dx = dx\int zdy:$$

intégrant de nouveau, mais par rapport à x seulement, on trouvera $u = \int dx \int zdy$.

En ne considérant cette recherche que du côté purement analytique, il est évident que la constante qu'il faudra ajouter pour compléter la première intégrale, peut renfermer x d'une manière quelconque : que celle qu'on mettra à la suite de la seconde intégrale, doit être considérée comme une fonction quelconque de y; et cela, parceque toute fonction de x seul doit disparaître comme une constante lorsqu'on ne différencie que par rapport à y, et qu'il en est de même de toute fonction de y, lorsqu'on ne différencie que par rapport à x.

L'ordre des intégrations est indifférent (122). En s'occupant d'abord de la variable x, on aurait eu

$\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$; et de là on aurait tiré successivement

$$\frac{du}{dy}=\int z dx, \qquad u=\int dy \int z dx.$$

Ce résultat et le précédent s'écrivent comme il suit :

$$u=\iint z dy dx, \quad \text{et} \quad u=\iint z dx dy,$$

en faisant passer les deux différentielles sous le dernier signe $\int$, ce qui est permis, lorsqu'on observe que chaque signe n'est relatif qu'à l'une des variables en particulier.

Pour éclaircir et confirmer ce qui précède, soit $z=\frac{1}{x^2+y^2}$; il viendra

$$u=\iint\frac{dxdy}{x^2+y^2}=\int dx\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\int dy\int\frac{dx}{x^2+y^2}.$$

La première succession d'intégrales donne

$$\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right)+X',$$

résultat dans lequel X' représente une fonction arbitraire de x, ajoutée pour compléter l'intégrale; en intégrant de nouveau par rapport à x, et faisant $\int X'dx=X$, on trouve

$$\int dx\int\frac{dy}{x^2+y^2}=\int dx\left[\frac{1}{x}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right)+X'\right]$$
$$=\int\frac{dx}{x}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right)+X.$$

L'intégrale $\int\frac{dx}{x}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{y}{x}\right)$ s'obtient en série,

en mettant au lieu de arc $\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$ son développement $\frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \text{etc.}$ (176); et comme il faut, après cette intégration, ajouter une fonction arbitraire de y, en la désignant par Y, on aura enfin

$$\iint \frac{dx dy}{x^2+y^2} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.}$$

En opérant dans un ordre inverse, d'après la seconde succession d'intégrales, on trouvera

$$\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y',$$

$$\int dy \int \frac{dx}{x^2+y^2} = \int dy \left[\frac{1}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y'\right]$$

$$= \int \frac{dy}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) + Y;$$

mais si l'on observe que

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right);$$

on aura, après la dernière intégration et l'addition d'une fonction arbitraire de x,

$$\iint \frac{dx dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{y} ly - \int \frac{dy}{y} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right) + Y + X;$$

et comme on peut comprendre le terme $\frac{\pi}{2} ly$ dans la fonction arbitraire Y, ce résultat, qui se changera par là en

$$\iint\frac{dxdy}{x^2+y^2}=X+Y-\int\frac{dy}{y}\text{arc}\left(\tang=\frac{y}{x}\right),$$

sera le même que le précédent, ainsi qu'on peut s'en convaincre en mettant pour arc $\left(\tang=\frac{y}{x}\right)$ son développement.

248. Lorsque l'on regarde $\iint zdxdy$ comme exprimant le volume d'un corps, il faut avoir égard aux limites entre lesquelles doit être prise chaque intégrale, et qui tiennent à la nature des surfaces par lesquelles le corps proposé est terminé latéralement.

Le cas le plus simple est celui où le corps est fermé par quatre plans, parallèles deux à deux aux plans coordonnés CAD, BAD. En supposant que les premiers répondent aux abscisses $x=a$, $x=a'$, et les seconds aux abscisses $y=b$, $y=b'$, on prendra l'intégrale $\int zdx$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a'$, en y regardant d'ailleurs y comme constant; et nommant P le résultat obtenu, il restera à prendre l'intégrale $\int Pdy$, depuis $y=b$, jusqu'à $y=b'$.

Lorsque le corps proposé est terminé latéralement par des surfaces courbes, les valeurs extrêmes de l'une des variables sont liées avec celles de l'autre, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant, où il s'agit de trouver le volume d'une sphère dont le centre est en A, et dont le rayon est égal à r.

On a $x^2+y^2+z^2=r^2$, et parconséquent

$$\iint zdxdy=\iint dxdy\sqrt{r^2-x^2-y^2};$$

on trouve d'abord, en supposant y constant (161, et 173)

$$\int zdx=\int dx\sqrt{r^2-x^2-y^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$
$$+\frac{1}{2}(r^2-y^2)\,\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}}\right).$$

Ici la valeur extrême de x est représentée par QF, ordonnée du cercle $BFEC$, suivant lequel la sphère rencontre le plan BAC; et si le volume cherché doit être terminé du côté opposé, par le plan CAD, il est évident que l'intégrale ci-dessus devra être prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=QF$. Mais QF est liée avec AQ, car en faisant $z=0$, on trouve $x^2+y^2=r^2$ pour l'équation du cercle $BFEC$, d'où il suit que $QF=\sqrt{r^2-\overline{AQ}^2}$; et parconséquent, pour une valeur quelconque de y, les valeurs extrêmes de x sont $x=0$ et $x=\sqrt{r^2-y^2}$.

Le résultat obtenu plus haut se réduit à $\frac{\pi}{4}(r^2-y^2)$, puisque arc $(\sin=1)=\frac{\pi}{2}$, et l'intégrale $\int dy \int z dx$ devient

$$\frac{\pi}{4}\int dy(r^2-y^2)=\frac{\pi}{4}\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right).$$

Cette dernière doit être prise depuis la plus grande valeur de y, qui dans le cas actuel est $AC=r$, jusqu'à la plus petite, que je supposerai nulle, en fermant de ce côté le corps par le plan BAD : le volume du segment $ABCD$, qui est la huitième partie de la sphère, sera donc $\frac{\pi r^3}{6}$; et parconséquent le volume de la sphère entière sera $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Il est à propos de remarquer qu'on peut obtenir immédiatement le volume de tout l'hémisphère supérieur au plan BAC, en prenant la première intégrale depuis $x=+\sqrt{r^2-y^2}$, jusqu'à $x=-\sqrt{r^2-y^2}$; car dans ce cas les valeurs extrêmes de x se terminent de part et d'autre à la circonférence du cercle $BFEC$,

dont AC est le diamètre, et on a la valeur complète de $\int z dx = \frac{\pi}{2}(r^2y - y^2)$. Prenant ensuite

$$\int dy \int z dx = \frac{\pi}{2}\left(r^2y - \frac{y^3}{3}\right),$$

depuis $y = r$, jusqu'à $y = -r$, c'est-à-dire, depuis l'extrémité C du diamètre du cercle $BFEC$, jusqu'à l'autre extrémité qui tombe derrière le plan BAD, on trouve $\frac{2\pi r^3}{3}$, et en doublant on a, comme ci-dessus, $\frac{4\pi r^3}{3}$ pour la sphère entière.

249. En considérant les différentielles comme les accroissemens infiniment petits des variables ou des fonctions dont elles dérivent, il est évident que la valeur complète de $dy\int z dx$ est l'expression de la tranche $FHQqhf$, comprise entre deux plans parallèles au plan ABD des x et z; mais $\int z dx$ étant l'aire de la section FHQ, il s'ensuit que la tranche infiniment mince $FHQqhf$ peut être regardée comme égale à $\overline{FHQ} \times \overline{Qq}$, c'est-à-dire, à l'aire de la courbe qui lui sert de base, multipliée par l'épaisseur Qq. On voit enfin que $\int dy \int z dx$ exprime la somme de toutes les tranches semblables comprises dans le volume cherché.

250. En général, s'il faut déterminer la portion du corps proposé, terminée latéralement par le cylindre FIG. 48. élevé perpendiculairement au plan ABC, *fig.* 48, sur la courbe donnée $E'N'G'$, on prendra l'intégrale $\int z dx$, depuis $x = AP$, jusqu'à $x = Ap$, afin que l'expression $dy\int z dx$ devienne celle de la tranche $MM'N'Nnn'm'm$. Les lignes AP et Ap, respectivement égales à QM'

et QN', seront données en fonction de $AQ = y$, par l'équation de la courbe $E'N'G'$ dont elles sont les abscisses; en les représentant par $F(y)$ et $f(y)$, on devra prendre $\int z\mathrm{d}x$, depuis $x = F(y)$, jusqu'à $x = f(y)$, ce qui, comme l'on voit, introduira de nouvelles fonctions de y que z ne renfermait pas, et pourra augmenter ou diminuer la difficulté de la seconde intégration. Pour obtenir ensuite dans celle-ci la valeur totale de l'espace cherché, ou la somme des tranches dont on a déjà l'expression générale, il faudra prendre $\int \mathrm{d}y \int z\mathrm{d}x$, depuis $y = AF$ jusqu'à $y = AH$, valeurs qui répondent aux limites E' et G', de la courbe $E'N'G'$ dans le sens des y (80).

Il pourrait arriver que le contour $E'N'G'$, au lieu d'être une courbe continue, fût l'assemblage de plusieurs portions de courbes différentes; l'application des principes précédens à ce cas est trop facile pour qu'il soit besoin de s'y arrêter.

251. On parvient à l'expression générale de la différentielle de l'aire d'une surface courbe, en imaginant cette surface partagée en zones, telles que $EGge$, *fig.* 47, FIG. 47.
par des plans parallèles à l'un des plans coordonnés, et en concevant que chacune de ces zones soit découpée en portions quadrangulaires $MmNn$, par des plans parallèles à un autre plan coordonné. A l'inspection de la figure on voit que l'aire $DGMH$ que je représenterai par s, s'accroît du quadrilatère curviligne $GMmg$, quand x augmente de Pp, et que ce quadrilatère s'accroît de $MmNn$, quand y vient ensuite à augmenter de Qq. Un raisonnement semblable à celui du n° 246, fera voir que la limite du rapport de $\frac{MmNn}{Pp \times Qq}$ est égale au coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$.

Pour parvenir à cette limite, on observe d'abord que les quatre plans

$$m'M \text{ et } N'n,\ n'M \text{ et } N'm,$$

parallèles deux à deux aux plans des x, z et des y, z, qui déterminent le quadrilatère courbe $MmNn$, déterminent aussi, sur le plan tangent au point M, *fig.* 49, un parallélogramme $MXYZ$, dans lequel toutes les lignes tirées du point M, seraient tangentes aux diverses sections que feraient dans le quadrilatère courbe, des plans menés par l'ordonnée MM', et auraient avec les arcs de ces sections un rapport tendant sans cesse vers l'unité (74); on peut donc dans la limite cherchée, substituer au quadrilatère courbe $MmNn$, le parallélogramme $MXYZ$, qui est égal à la racine de la somme des quarrés de ses projections sur chacun des plans coordonnés (*) : or ces projections, formées par des lignes parallèles entr'elles, sont nécessairement des parallélogrammes. Celle qui se trouve sur le plan de x, y, est le rectangle $M'm'N'n'$ exprimé par $dxdy$. En menant YY'' et ZZ'' parallèles à $M'n'$ et à $m'N'$, on formera la projection $MXZ''Y''$ sur le plan des x; z, égale à $MY'' \times M'm'$; et comme

$$MY'' = n'Y - M'M = \frac{dz}{dy}dy,$$

on aura

$$MXZ''Y'' = \frac{dz}{dy}dxdy.$$

On trouvera d'une manière semblable que la projection sur le plan des y, z, est $\frac{dz}{dx}dxdy$: on aura

(*) Cette proposition est démontrée n° 61 du *Complément des Élémens de Géométrie*.

donc

donc

$$MXZY = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}y^2}} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+p^2+q^2};$$

en faisant $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = p$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = q$; et il viendra

$$\frac{MXYZ}{\overline{Pp}\times\overline{Qq}} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Ceci montre que l'aire est donnée, comme le volume, par un coefficient différentiel du second ordre, et qu'on obtient l'un et l'autre par le même mode d'intégration; ensorte que $\mathrm{d}y\int\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2+q^2}$ représente l'aire de la zone *FHhf*, *fig.* 47, et qu'on a

$$s = \int\mathrm{d}y\int\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2+q^2} = \iint\mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

252. L'application de l'Analyse à la Mécanique conduit souvent à des intégrales de la forme $\iiint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, qu'on appelle *intégrales triples*, par analogie avec celles de la forme $\iint V\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, désignées sous le nom *d'intégrales doubles*. Dans les premières, la fonction V peut renfermer les trois variables x, y, z, considérées comme indépendantes les unes des autres, ensorte que chaque signe d'intégration ne tombe que sur une d'elles en particulier. Il est aisé de voir que ces intégrales proviennent de la détermination d'une fonction u, dépendante de trois variables x, y, z; et dont on ne connaît que le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$, donné par l'équation $\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} = V$; car on tire de là, en opérant comme dans le n° 247, 1°. en regardant x et y comme constans,

$$\frac{d^3u}{dxdydz}dz = d.\frac{d^2u}{dxdy} = Vdz, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = \int Vdz + T'',$$

T'' étant une fonction arbitraire de x et de y; 2°. en regardant x et z comme constans,

$$\frac{d^2u}{dxdy}dy = d.\frac{du}{dx} = dy\int Vdz + T''dy, \quad \frac{du}{dx} = \int dy \int Vdz + T' + S',$$

T' désignant la fonction arbitraire de x et de y, résultante de $\int T''dy$, et S' une fonction arbitraire de x et de z; 3°. enfin, en regardant y et z comme constans,

$$\frac{du}{dx}dx = du = dx\int dy \int Vdz + T'dx + S'dx$$
$$= \int dx \int dy \int Vdz + T + S + R,$$

T et S représentant des fonctions arbitraires résultantes de $\int T'dx$ et de $\int S'dx$, et R étant une fonction arbitraire de y et de z: l'intégrale complète renferme donc trois fonctions arbitraires, savoir: une de x et de y, une de x et de z, et une de y et de z. En réunissant les différentielles sous le dernier signe d'intégration, $\int dz \int dy \int Vdx$ devient $\iiint Vdxdydz$, et a, sous cette dernière forme, la même signification que sous la précédente.

Cet exemple suffit pour montrer comment on reviendra du coefficient différentiel d'un ordre quelconque d'une fonction de plusieurs variables, à cette fonction elle-même. Les fonctions arbitraires introduites ici n'ont rapport, comme dans le n° 247, qu'au cas où les intégrales sont prises entre des limites pour lesquelles les variables x, y et z, sont indépendantes les unes des autres; mais il arrive le plus souvent que l'intégrale relative à z doit être prise de-

puis $z=F(x, y)$ jusqu'à $z=f(x, y)$, F et f étant des fonctions données, l'intégrale relative à y, depuis $y=F_1(x)$ jusqu'à $y=f_1(x)$, et enfin l'intégrale relative à x, depuis $x=a$ jusqu'à $x=a'$.

De l'intégration des équations différentielles à deux variables.

De la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre.

253. Dans ce qui précède, j'ai supposé que les coefficiens différentiels étaient exprimés immédiatement par le moyen de la variable d'où dépend leur fonction primitive; mais le plus souvent on n'a qu'une équation différentielle qui renferme ces diverses quantités. Pour le premier ordre, l'équation différentielle, lorsqu'elle est du premier degré par rapport à dx et à dy, a nécessairement la forme $Mdx+Ndy=0$, et elle exprime, ainsi qu'on l'a fait voir n° 38, une relation entre la variable x, la fonction y et son coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$.

Le moyen qui s'est offert le premier aux Analystes, pour découvrir l'équation primitive dont celle-ci tire son origine, a été de chercher à séparer les variables, c'est-à-dire, à ramener l'équation $Mdx+Ndy=0$ à la forme $Xdx+Ydy=0$, X étant une fonction de x seul, et Y une fonction de y seul. En effet, lorsqu'on est parvenu à ce point, les termes Xdx et Ydy s'intègrent par les méthodes enseignées précédemment; et on a $\int Xdx+\int Ydy=C$, C désignant une constante arbitraire.

254. Pour donner un exemple des cas où l'équation différentielle se présente immédiatement sous la forme ci-dessus, soit $x^m dx + y^n dy = 0$; on trouvera sur-le-champ $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} = C$.

Si l'équation proposée était $ydx - xdy = 0$, la séparation serait facile à effectuer, car on voit qu'en divisant par xy, on trouverait $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$; prenant séparément l'intégrale de chaque terme de cette dernière, on aurait $lx - ly = C$, ou $l\frac{x}{y} = C$: et puisque l'on peut regarder la constante arbitraire comme un logarithme, on en conclurait $l\frac{x}{y} = lc$. En passant aux nombres, il viendrait $\frac{x}{y} = c$, ou $x = cy$.

Après cet exemple, on reconnaît sans peine que la séparation des variables s'effectuera de la même manière dans les équations $Ydx - Xdy = 0$, $XY_1 dx - YX_1 dy = 0$; car la première donne

$$\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} = 0,$$

et la seconde

$$\frac{Xdx}{X_1} - \frac{Ydy}{Y_1} = 0.$$

En général, si lorsqu'on prend la valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation proposée, on trouve $\frac{dy}{dx} = XY$, il est facile d'en tirer

$$X\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}y}{Y} = 0,$$

et parconséquent

$$\int X\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}y}{Y} = C.$$

255. Il y a encore un cas très-étendu où l'on sépare facilement les variables, c'est lorsque M et N sont des fonctions homogènes de x et de y. On s'appuye pour cela sur ce que, *si dans une fonction algébrique des quantités* x, y, z, *etc. où la somme des exposans de chacune de ces lettres est la même pour tous les termes, et égale à* m, *on substitue* Px *à* y, Qx *à* z, *etc. le résultat sera divisible par* x^m. En effet un terme quelconque de cette fonction étant de la forme $Ax^n y^p z^q$ etc. deviendra par la substitution indiquée $AP^p Q^q \ldots\ldots x^{n+p+q+\text{etc.}}$; mais par l'hypothèse on a dans tous les termes $n+p+q+$ etc.... $=m$, donc x^m sera facteur commun. Il suit de là que si la fonction proposée était égalée à zéro, ou bien qu'elle fût une fraction ayant pour numérateur et pour dénominateur deux polynomes homogènes du même degré, la quantité x disparaîtrait entièrement du résultat.

D'après ce qui précède, il suffit de faire $y = xz$, pour séparer les variables dans l'équation $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$; en effet, les fonctions M et N prennent la forme Zx^m, $Z_1 x^m$, Z et Z_1 ne renfermant que la nouvelle variable z, et comme $\mathrm{d}y = z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z$, il vient, en divisant par x^m, $Z\mathrm{d}x + Z_1(z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z) = 0$, résultat qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{Z_1\mathrm{d}z}{Z + zZ_1} = 0,$$

et dont on tire

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{Z_1 dz}{Z + zZ_1} = C.$$

J'appliquerai d'abord cette transformation à l'équation

$$xdx + ydy = nydx,$$

qui devient

$$(x - ny)dx + ydy = 0;$$

en passant tous les termes dans un membre, j'aurai

$$Z = 1 - nz, \quad Z_1 = z \text{ et } \int \frac{dx}{x} + \int \frac{zdz}{1 - nz + z^2} = C,$$

ou $lx + \int \frac{zdz}{1 - nz + z^2} = C$. L'intégrale $\int \frac{zdz}{1 - nz + z^2}$ peut simplifier en observant que

$$\frac{zdz}{1 - nz + z^2} = \frac{1}{2} \frac{2zdz - ndz}{1 - nz + z^2} + \frac{1}{2} \frac{ndz}{1 - nz + z^2};$$

car il vient alors

$$lx + \frac{1}{2} l(1 - nz + z^2) + \frac{1}{2} \int \frac{ndz}{1 - nz + z^2} = C.$$

L'intégrale qui reste à obtenir dépendra des logarithmes si $\frac{n}{2} > 1$, des arcs de cercle si $\frac{n}{2} < 1$, et sera algébrique si $\frac{n}{2} = 1$. Je ne rapporterai que le résultat relatif à ce dernier cas : $\int \frac{ndz}{1 - nz + z^2}$ devient alors ;

$$\int \frac{2dz}{(1-z)^2} = \frac{2}{1-z}, \quad l(1 - nz + z^2) = l(1-z)^2,$$

et on a parconséquent $lx + l(1-z) + \frac{1}{1-z} = C$, ou

$l(x-y)+\frac{x}{x-y}=C$, en remettant pour z sa valeur $z=\frac{y}{x}$.

Le terme $\frac{x}{x-y}$ peut être changé en un logarithme, en observant que, par la définition des logarithmes népériens, une quantité quelconque, u, est le logarithme du nombre e^u; et d'après cette remarque, on écrira l'équation précédente sous la forme

$$l.(x-y)+le^{\frac{x}{x-y}}=lc,$$

dont on déduit successivement

$$l.(x-y)\,e^{\frac{x}{x-y}}=lc, \quad \text{et} \quad (x-y)\,e^{\frac{x}{x-y}}=c.$$

Il est à propos de faire attention à cette manière de passer des logarithmes aux nombres, parcequ'on l'emploie souvent.

Soit encore à intégrer l'équation

$$xdy-ydx=dx\sqrt{x^2+y^2}.$$

En faisant $y=xz$, et divisant par x tous ses termes réunis dans un seul membre, on trouvera

$$dx\sqrt{1+z^2}-xdz=0,$$

ce qui donnera

$$\frac{dx}{x}-\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=0.$$

On obtiendra ensuite, par l'intégration de chaque terme en particulier,

$$lx-l(z+\sqrt{1+z^2})=lc, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{z+\sqrt{1+z^2}}=c;$$

et remettant pour z, sa valeur $\frac{y}{x}$, il viendra

$$\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}=c, \text{ ou } -y+\sqrt{x^2+y^2}=c,$$

en multipliant les deux termes du premier membre par $y-\sqrt{x^2+y^2}$: faisant disparaître le radical, on aura enfin $x^2=c^2+2cy$.

256. L'équation

$$(a+mx+ny)\,dx+(b+px+qy)\,dy=0$$

peut facilement être rendue homogène. En substituant $t+\alpha$, à la place de x, et $u+\beta$ à celle de y, on a $dx=dt$, $dy=du$, et

$$(a+m\alpha+n\beta+mt+nu)dt+(b+p\alpha+q\beta+pt+qu)du=0;$$

on fait disparaître les termes constans, en posant les équations $a+m\alpha+n\beta=0$, $b+p\alpha+q\beta=0$, au moyen desquelles on détermine les quantités α et β, et il reste alors l'équation différentielle

$$(mt+nu)\,dt+(pt+qu)\,du=0,$$

homogène par rapport aux nouvelles variables u et t.

La transformation précédente est la même que celle dont on se sert pour changer l'origine des coordonnées sur un plan (*Trig.* 116); elle ne donne aucun résultat quand $mq-np=0$, cas auquel les valeurs de α et de β deviennent infinies; mais alors on a $q=\frac{np}{m}$, et parconséquent

$$px+qy=\frac{p}{m}(mx+ny);$$

l'équation proposée se changeant en

$$a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + (mx + ny)\left(\mathrm{d}x + \frac{p}{m}\mathrm{d}y\right) = 0,$$

il suffit de faire $mx + ny = z$, pour y séparer les variables.

En substituant cette valeur, ainsi que celle de $\mathrm{d}y$, qui en résulte, et dégageant $\mathrm{d}x$, on trouve

$$\mathrm{d}x + \frac{(bm + pz)\mathrm{d}z}{amn - bm^2 + (mn - pm)z} = 0;$$

l'intégrale de cette équation renfermera des logarithmes, excepté dans le cas de $mn - pm = 0$, où elle sera

$$x + \frac{2bmz + pz^2}{2(amn - bm^2)} = C.$$

La transformation employée dans ce dernier cas a changé l'équation proposée en une autre qui ne contient plus qu'une des variables; et il est facile de voir que, quelle que soit l'équation sur laquelle on ait produit cet effet, on pourra lui donner la forme $\mathrm{d}x + Z\mathrm{d}z = 0$, Z étant une fonction de z seul, et qu'on en tirera $x + \int Z\mathrm{d}z = C$.

257. La séparation des variables s'opère d'une manière très-simple sur l'équation $\mathrm{d}y + Py\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}x$, dans laquelle P et Q désignent des fonctions quelconques de x. En y substituant Xz et $z\mathrm{d}X + X\mathrm{d}z$, au lieu de y et de $\mathrm{d}y$, elle devient

$$z\mathrm{d}X + X\mathrm{d}z + PXz\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}x.$$

La quantité X étant considérée comme une fonction indéterminée de x, il est permis d'en disposer pour

partager l'équation précédente en deux autres où les variables puissent se séparer; or il est facile de voir que cette condition sera remplie si on fait $Xdz+PXzdx=0$, ce qui donne $zdX=Qdx$. En divisant la première de ces équations par X, elle se réduit à $dz+Pzdx=0$; on en tire $\frac{dz}{z}+Pdx=0$, $lz+\int Pdx=0$, et en passant aux nombres $z=e^{-\int Pdx}$: on néglige ici la constante arbitraire, parcequ'il suffira d'en ajouter une à la fin de l'opération. Prenant ensuite la valeur de dX dans la seconde équation, après y avoir substitué celle de z que l'on vient de trouver, on aura

$$dX=e^{\int Pdx}Qdx, \quad X=\int e^{\int Pdx}Qdx+C,$$

et parconséquent

$$y=e^{-\int Pdx}\left(\int e^{\int Pdx}Qdx+C\right).$$

L'équation $dy+Pydx=Qdx$ est remarquable parceque la variable y et sa différentielle ne s'y trouvent qu'au premier degré; et on l'appelle, à cause de cette circonstance, *équation linéaire* du premier ordre, dénomination que j'ai cru devoir changer dans celle d'*équation du premier degré et du premier ordre* (*).

258 Les premiers Analystes qui se sont occupés du Calcul intégral, classaient les équations différentielles par le nombre de leurs termes. Dans celles qui n'en

(*) Le mot *linéaire* est impropre; il est relatif à la Géométrie, et en l'appliquant aux équations, on a eu en vue la ligne droite, dans l'équation de laquelle l'ordonnée et l'abscisse ne se trouvent qu'au premier degré: on ne saurait donc regarder comme linéaires des équations telles que $dy+Pydx=Qdx$, qui appartiennent le plus souvent à des courbes transcendantes.

ont que deux et dont la forme est parconséquent $\beta u^g z^h dz = \alpha u^e z^f du$, les variables se séparent sur-le-champ, puisqu'on en tire $\beta z^{h-f}dz = \alpha u^{e-g}du$; mais il n'en est pas de même des équations à trois termes, comprises dans la formule

$$\gamma u^i z^k dz + \beta u^g z^h du = \alpha u^e z^f du.$$

On peut lui donner une forme plus simple en divisant tous ses termes par $\gamma u^i z^f$; elle deviendra

$$z^{k-f}dz + \frac{\beta}{\gamma} u^{g-i} z^{h-f} du = \frac{\alpha}{\gamma} u^{e-i} du;$$

supposant ensuite

$$z^{k-f}dz = \frac{dy}{k-f+1}, \qquad u^{g-i}du = \frac{dx}{g-i+1};$$

on aura

$$z^{k-f+1} = y, \qquad u^{g-i+1} = x,$$

et

$$dy + \frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma} y^{\frac{h-f}{k-f+1}} dx = \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma} x^{\frac{e-g}{g-i+1}} dx:$$

en faisant pour abréger

$$\frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma} = b, \qquad \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma} = a,$$

$$\frac{h-f}{k-f+1} = n, \qquad \frac{e-g}{g-i+1} = m,$$

il en résultera l'équation $dy + by^n dx = ax^m dx$.

259. Le cas le plus simple, après celui qui rentre dans l'équation du prémier degré, est celui où $n=2$. On tombe alors sur l'équation $dy + by^2 dx = ax^m dx$, traitée pour la première fois par Riccati, Géomètre italien, dont elle a conservé le nom.

Les variables se séparent immédiatement dans cette équation, quand $m=0$; elle devient $dy+by^2dx=adx$, et donne

$$dx=\frac{dy}{a-by^2}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{dy}{\sqrt{a}+y\sqrt{b}}+\frac{dy}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right].$$

On trouve, en intégrant,

$$x=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\,l\left(\frac{\sqrt{a}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right)+C.$$

Pour chercher à rendre la même équation homogène, on fait $y=z^k$; elle se change en

$$kz^{k-1}dz+bz^{2k}dx=ax^mdx,$$

et prendra la forme demandée, si $k-1=2k=m$, ce qui donne $k=-1$, et suppose qu'on ait $m=-2$; il vient alors

$$-\frac{dz}{z^2}+\frac{bdx}{z^2}=\frac{adx}{x^2}.$$

260. Je ne m'arrêterai point à l'intégration de cette dernière équation; mais je passerai à une transformation plus générale, celle qui résulte de $y=Ax^p+x^qz$. On trouve dans cette hypothèse

$$dy=(pAx^{p-1}+qx^{q-1}z)dx+x^qdz$$
$$y^2dx=(A^2x^{2p}+2Ax^{p+q}z+x^{2q}z^2)dx,$$

et parconséquent

$$x^qdz+(qx^{q-1}+2bAx^{p+q}+bx^{2q}z)zdx$$
$$+(pAx^{p-1}+bA^2x^{2p})dx=ax^mdx.$$

Cette équation se réduira elle-même à trois termes, si on a les suivantes.

$p-1=2p$, $pA+bA^2=0$, $q-1=p+q$, $q+2bA=0$.

La première et la troisième s'accordent à donner $p=-1$, on tire de la seconde et de la quatrième $A=\frac{1}{b}$, $q=-2$, valeurs qui conduisent à $y=\frac{1}{bx}+\frac{z}{x^2}$,

$$x^{-2}dz+bx^{-4}z^2dx=ax^m dx,$$

$$\text{ou } dz+bz^2\frac{dx}{x^2}=ax^{m+2}dx.$$

Par ce moyen l'équation proposée sera réduite à l'homogénéité, si $m=-2$; et il montre de plus qu'on pourra séparer les variables si $m=-4$, puisqu'on aura dans ce cas

$$dz+(bz^2-a)\frac{dx}{x^2}=0, \text{ ou } \frac{dz}{bz^2-a}+\frac{dx}{x^2}=0.$$

Si dans l'équation $dz+bz^2\frac{dx}{x^2}=ax^{m+2}dx$, on fait $z=\frac{1}{y'}$, il viendra

$$-dy'+b\frac{dx}{x^2}=ay'^2x^{m+2}dx, \text{ ou } dy'+ay'^2x^{m+2}dx=b\frac{dx}{x^2};$$

posant ensuite $x^{m+2}dx=\frac{dx'}{m+3}$, on trouvera

$$x^{m+3}=x', \quad dx=\frac{1}{m+3}x'^{-\frac{m+2}{m+3}}dx',$$

$$dy'+\frac{a}{m+3}y'^2dx'=\frac{b}{m+3}x'^{-\frac{m+4}{m+3}}dx,$$

puis, faisant pour abréger

$$\frac{a}{m+3}=b', \quad \frac{b}{m+3}=a' \text{ et} -\frac{m+4}{m+3}=m',$$

on tombera sur l'équation

$$dy' + b'y'^2dx' = a'x'^{m'}dx'$$

semblable à la proposée, et parconséquent suscesptible des memes transformations : la séparation des variables y' et x' sera donc possible, après la substitution de $y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2}$, si $m' = -4$.

Si cette condition n'avait pas lieu, on ferait encore dans la transformée en z',

$$z' = \frac{1}{y''}, \; x'^{m'+3} = x'',$$

$$\frac{a'}{m'+3} = b'', \; \frac{b'}{m'+3} = a'', \; -\frac{m'+4}{m'+3} = m'';$$

la similitude de ces expressions avec les précédentes, conduit nécessairement à l'équation

$$dy'' + b''y''^2dx'' = a''x''^{m''}dx'',$$

encore semblable à la proposée, et susceptible de la séparation des variables, quand $m'' = -4$.

En poursuivant de cette manière, on parviendrait à une équation séparable, si dans la suite des exposans

$$m, \; m' = -\frac{m+4}{m+3}, \; m'' = -\frac{m'+4}{m'+3},$$

$$m''' = -\frac{m''+4}{m''+3}, \text{ etc.}$$

il s'en trouvait un égal à -4. En supposant successivement que ce soit m, m', m'', m''', etc. on obtient

pour m, les nombres -4, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{16}{7}$, etc. compris dans la formule

$$m = -\frac{4i}{2i-1},$$

i étant un nombre entier positif quelconque.

Ces cas ne renferment pas encore tous ceux que l'on sait déduire des transformations précédentes. Pour en trouver une nouvelle série, il suffit de commencer par faire dans la proposée $y = \frac{1}{y'}$, ce qui donnera

$$dy' + ay'^2x^m dx = bdx,$$

et posant

$$x^{m+1} = x', \quad \frac{a}{m+1} = b', \quad \frac{b}{m+1} = a', \quad -\frac{m}{m+1} = m',$$

il en résultera

$$dy' + b'y'^2dx' = a'x'^{m'}dx'.$$

Cette nouvelle équation, étant semblable à la proposée, est aussi susceptible des mêmes opérations; c'est-à-dire qu'en y faisant

$$y' = \frac{1}{bx'} + \frac{z'}{x'^2},$$

et continuant comme on l'a indiqué sur la page précédente, on parviendrait à une transformée séparable, si le nombre m' était quelqu'un de ceux que comprend la formule $-\frac{4i}{2i-1}$, et par conséquent, si l'on avait

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1}.$$

On tire de là

$$m = -\frac{4i}{2i+1};$$

et donnant à i les valeurs 1, 2, 3, etc. il vient la suite des nombres

$$-\tfrac{4}{3},\ -\tfrac{8}{5},\ -\tfrac{12}{7},\ -\tfrac{16}{9},\ \text{etc.}$$

Il suit donc de tout ce qui précède, que l'équation de Riccati est séparable, quand l'exposant $m=-2$, et lorsqu'il rentre dans la forme $\frac{-4i}{2i\mp 1}$.

On pourrait multiplier davantage les exemples; mais toutes ces équations particulières, d'une forme bizarre le plus souvent, ne se rencontrant jamais dans les applications, n'offrent aucun intérêt: je passerai donc à une autre méthode, due à Euler.

Recherche du facteur propre à rendre intégrable une équation différentielle du premier ordre.

261. Il faut se rappeler qu'une équation différentielle n'est pas toujours le produit immédiat de la différentiation d'une fonction de deux variables, mais qu'elle résulte en général de l'élimination d'une constante arbitraire, entre l'équation primitive dont elle tire son origine, et la différentielle immédiate de cette équation (43).

L'élimination s'effectue sur-le-champ, lorsque l'équation primitive est sous la forme $u=c$, u désignant une fonction quelconque de x et de y; car, en différentiant, on a $du=0$. Si la fonction du n'a aucun facteur par lequel elle ait pu être divisée, elle conservera

vera toujours la forme de différentielle complète à deux variables; et l'équation $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx}$ (122) fournit le moyen de reconnaître cette forme : car quand on a

$$du=Mdx+Ndy,$$

il en résulte

$$\frac{du}{dx}=M, \frac{du}{dy}=N, \frac{d^2u}{dxdy}=\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx},$$

et parconséquent

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}.$$

Il faudra donc que toute fonction $Mdx+Ndy$, lorsqu'elle sera une différentielle complète, rende identique l'équation ci-dessus; et lorsque cette condition sera remplie, il sera facile de remonter à son intégrale, puisqu'alors on aura $M=\frac{du}{dx}$, $N=\frac{du}{dy}$, et que l'on en déduira la valeur des différentielles partielles.

En prenant celle de la différentielle relative à x, par exemple, il viendra $\frac{du}{dx}dx=Mdx$, et parconséquent $u=\int Mdx+Y$. On ajoute dans ce cas, comme dans celui du n° 247, une fonction arbitraire de y, puisque l'intégration n'a eu lieu que par rapport à l'une des variables; mais ici cette fonction se détermine, parce que la fonction u doit satisfaire à l'équation $N=\frac{du}{dy}$.

L'équation $u=\int Mdx+Y$ donne

$$\frac{du}{dy}=\frac{d\int Mdx}{dy}+\frac{dY}{dy};$$

réprésentant $\int M\mathrm{d}x$ par v, on aura

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}=N,$$

d'où on tirera

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}=N-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y},$$

et en intégrant,

$$Y=\int\left(N-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y;$$

on trouvera donc

$$u=\int M\mathrm{d}x+\int\left(N-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y:$$

telle est l'intégrale de la fonction proposée.

Ce résultat fait voir que la fonction $N-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ ne doit renfermer que la seule variable y, sans quoi il ne serait pas vrai, comme on l'a supposé, que $M\mathrm{d}x$ et $N\mathrm{d}y$ fussent les différentielles partielles d'une même fonction u; et en le développant il conduit à l'équation de condition $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}$, trouvée précédemment par une considération inverse.

Il est évident que pour obtenir $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\int M\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, il faut substituer $y+\mathrm{d}y$, pour y, dans la fonction $\int M\mathrm{d}x$, qui deviendra alors

$$\int\left(M+\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+\text{etc.}\right)\mathrm{d}x=\int M\mathrm{d}x+$$
$$\int\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\text{etc.}=\int M\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\int\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x+\text{etc.}$$

puisque le signe $\int$ n'est relatif qu'à la variable x; on aura donc

$$\frac{d\int M dx}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx:$$

substituant cette valeur de $\frac{dv}{dx}$, dans $Y = \int \left(N - \frac{dv}{dy}\right) dy$, il viendra

$$Y = \int \left(N - \int \frac{dM}{dy} dx\right) dy.$$

En prenant les différentielles, d'abord par rapport à y, on trouvera

$$\frac{dY}{dy} = N - \int \frac{dM}{dy} dx;$$

et différentiant ensuite par rapport à x, on aura enfin

$$\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0 \text{ (*)}.$$

(*) L'équation $\frac{d\int M dx}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx$, renferme le théorême donné par Leibnitz pour différentier sous le signe $\int$. Il appelait ce procédé *differentiatio de curvâ in curvam*, parceque dans la question qu'il se proposait de résoudre, il passait d'une courbe à une autre de la même espèce, en faisant varier une constante.

Le théorême de Leibnitz peut se déduire immmédiatement de l'équation $\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$, puisque si l'on fait $u = \int M dx$, on aura

$$\frac{du}{dx} = M, \quad \frac{d^2u}{dx dy} = \frac{dM}{dy};$$

et en intégrant par rapport à x, on trouvera

$$\int \frac{d^2u}{dx dy} dx = \int \frac{d^2u}{dy dx} dx = \frac{du}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx.$$

262. La fonction $\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ étant écrite ainsi :

$$\mathrm{d}u = \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

donne successivement

$$M = \frac{y}{x^2+y^2},\ N = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}$$

$$\int M\mathrm{d}x = \int\frac{y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int\frac{\frac{\mathrm{d}x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}$$

$$= \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{x}{y}\right),$$

d'où $$u = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}\,\frac{x}{y}\right) + Y.$$

Différentiant et faisant tout varier, on trouvera

$$\mathrm{d}u = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + \mathrm{d}Y;$$

comparant avec la fonction proposée, on aura

$$\mathrm{d}Y = 0,\ \text{d'où}\ Y = const.$$

et parconséquent

$$\int\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}\,\frac{x}{y}\right) + const.\ (*)$$

(*) Je me suis arrêté sur cette intégration, parcequ'elle sert de base à une démonstration très-élégante du principe de la composition des forces, donnée par Laplace dans sa *Mécanique céleste*.

Soit encore l'équation

$$\frac{dx}{x}+\frac{y^2dx}{x^3}-\frac{ydy}{x^2}+\frac{(ydx-xdy)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{dy}{2y}=0.$$

En la comparant avec la formule $Mdx+Ndy=0$, on a

$$M=\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3},\; N=\frac{-y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\frac{1}{2y},$$

et on trouve

$$\frac{dM}{dy}=\frac{2y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{dN}{dy}=\frac{2y+2\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}-\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+y^2}};$$

ces valeurs étant égalées entr'elles et réduites, donnent

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}=\frac{2y}{x^3}+\frac{x^2+2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}},$$

et parconséquent l'équation proposée peut s'intégrer immédiatement. On obtient d'abord

$$\int Mdx=lx-\frac{y^2}{2x^2}+y\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2};$$

mais $\displaystyle\int\frac{ydx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2}=-\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}$

$$+\tfrac{1}{2}l\frac{(-y+\sqrt{x^2+y^2})}{x};$$

donc $\int Mdx = lx - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}$

$$+\tfrac{1}{2}l\frac{(-y+\sqrt{x^2+y^2})}{x} = v.$$

On trouve ensuite

$$N - \frac{dv}{dy} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{y^2}{2x^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2y};$$

et enfin $Y = \frac{1}{2}ly$, d'où il résulte

$$u = \tfrac{1}{2}lx - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{-y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) = c.$$

La forme de cet exemple était trop compliquée pour qu'on pût y reconnaître, par la seule inspection, une différentielle complète ; et dans tous les cas semblables il faudra commencer par s'assurer si l'équation proposée satisfait ou non à la condition d'intégrabilité.

263. Lorsque l'équation primitive n'est pas sous la forme $u = c$, ou que la différentielle $du = 0$ renferme des facteurs qui disparaissent, l'équation du premier ordre qui en résulte n'est plus immédiatement intégrable. Si on avait, par exemple, $u = y - cx = 0$, on trouverait $du = dy - cdx = 0$, et éliminant c, il viendrait $xdy - ydx = 0$, équation qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, puisqu'elle donne

$$M = -y,\ N = x,\ \frac{dM}{dy} = -1,\ \frac{dN}{dx} = 1.$$

Mais si on dégage la constante c, on aura $\frac{y}{x} = c$, et en différentiant, $\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$; sous cette forme

$$M = -\frac{y}{x^2},\quad N = \frac{1}{x},\quad \frac{dM}{dy} = -\frac{1}{x^2} = \frac{dN}{dx};$$

on voit donc que l'intégrabilité de l'équation......... $xdy - ydx = 0$ tient à la restitution du facteur $\frac{1}{x^2}$, qui a disparu après la différentiation et l'élimination de la constante arbitraire.

En général, toute équation différentielle, dans laquelle dx et dy ne passent pas le premier degré, ne peut résulter que de l'élimination de la constante c, dans une équation de la forme $P + cQ = 0$, P et Q désignant des fonctions quelconques de x et de y. On trouve par cette élimination $QdP - PdQ = 0$, tandis qu'en différentiant l'équation $\frac{P}{Q} = -c$, on aurait obtenu $\frac{QdP - PdQ}{Q^2} = 0$: la première manière d'opérer fait donc disparaître le facteur $\frac{1}{Q^2}$; et avec lui s'en vont aussi tous les facteurs qui peuvent être communs aux deux quantités QdP et PdQ.

Il suit de ce qui précède, que lorsque l'équation

$$Mdx + Ndy = 0$$

ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, c'est que la différentiation, et l'élimination de la constante arbitraire contenue dans l'équation primitive, ont fait disparaître un facteur qui, s'il était connu et restitué, rendrait le premier membre de l'équation proposée une différentielle complète à deux variables. Soit z ce facteur; on aura donc $zMdx + zNdy = du$, u étant une fonction primitive de x et de y; et parconséquent

$$\frac{d.zM}{dy} = \frac{d.zN}{dx}.$$

En développant cette dernière équation, on trouvera

$$M\frac{dz}{dy} + z\frac{dM}{dy} = N\frac{dz}{dx} + z\frac{dN}{dx},$$

ou $$M\frac{dz}{dy} - N\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)z = 0 \ldots (A).$$

Si l'on pouvait, en général, tirer de cette équation une valeur de z, l'intégration des équations différentielles quelconques du premier ordre s'effectuerait par le procédé du n° 261; mais l'équation (A) est presque toujours plus difficile à traiter que la proposée, puisque la fonction z qu'elle renferme dépend de deux variables, et a deux coefficiens différentiels, et qu'elle est parconséquent de l'espèce de celles dont la formation a été indiquée n° 131. Je ne saurais pour le moment entreprendre sa résolution, qui, comme on le verra dans la suite, ramène au point dont on est parti; mais je vais faire connaître quelques-unes des propriétés du facteur z.

264. Il est toujours facile de trouver le facteur z, lorsque l'on connaît l'équation primitive correspon-

dante à l'équation différentielle proposée, et qu'on peut la mettre sous la forme $u=c$, c étant la constante arbitraire. En différentiant, on trouve

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0,$$

et comparant avec $zMdx+zNdy=du$, il vient

$$z=\frac{\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy}{Mdx+Ndy};$$

le quotient est indépendant des différentielles dx et dy. On obtient encore le facteur z, en égalant entr'elles les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tirées des équations

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0, \qquad Mdx+Ndy=0,$$

ce qui donne $\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}=\frac{M}{N}$, et fait voir parconséquent que si M et N n'ont aucun facteur commun, z sera le plus grand diviseur commun des coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx} \text{ et } \frac{du}{dy}.$$

Connaissant une valeur de z, on en déduit une infinité d'autres, en observant que si on multiplie les deux membres de l'équation $zMdx+zNdy=du$, par une

fonction quelconque de u, que je désignerai par $\varphi(u)$, les deux membres du résultat

$$z\varphi(u)M\mathrm{d}x+z\varphi(u)N\mathrm{d}y=\varphi(u)\mathrm{d}u,$$

seront aussi des différentielles complètes; ainsi z étant un facteur propre à rendre intégrable l'équation.... $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$, le produit $z\varphi(u)$ jouira de la même propriété.

265. Il y a des cas où le facteur z ne doit renfermer que l'une des variables x ou y, et alors il est aisé d'en obtenir l'expression au moyen de l'équation (A). Supposant en effet dans cette équation, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=0$; elle deviendra

$$-N\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

et on en tirera

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x,$$

équation qui aura lieu si la quantité

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)$$

se réduit à une fonction de x. En représentant cette fonction par X, et en intégrant, on trouvera

$$lz=\int X\mathrm{d}x, \text{ ou } z=e^{\int X\mathrm{d}x}.$$

Cette formule s'applique à l'équation

$$\mathrm{d}y+Py\mathrm{d}x=Q\mathrm{d}x:$$

il vient

$$M=Py-Q,\quad N=1,\quad \frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)=P,$$

et parconséquent $z=e^{\int P\mathrm{d}x}$. Multipliant ensuite l'équation $\mathrm{d}y+Py\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}x=0$ par $e^{\int P\mathrm{d}x}$, on trouve $e^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+(Py-Q)\,e^{\int P\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=0$; intégrant le terme $e^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}y$, par rapport à y, on obtient..... $u=ye^{\int P\mathrm{d}x}+X$, X étant une fonction de x, déterminée par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}.ye^{\int P\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=(Py-Q)\,e^{\int P\mathrm{d}x};$$

de laquelle on tire

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=-\,e^{\int P\mathrm{d}x}Q,\qquad X=-\int e^{\int P\mathrm{d}x}Q\mathrm{d}x,$$

et parconséquent

$$ye^{\int P\mathrm{d}x}-\int e^{\int P\mathrm{d}x}Q\mathrm{d}x=C,$$

ou, comme dans le n° 257,

$$y=e^{-\int P\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int P\mathrm{d}x}Q\mathrm{d}x+C\right).$$

Je ne m'arrêterai point au cas où le facteur z ne devrait renfermer que la variable y; on voit aisément que son expression serait alors $z=e^{\int Y\mathrm{d}y}$, en faisant

$$Y=\frac{1}{M}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\right),$$

et que ce cas n'aurait lieu qu'autant que Y serait absolument indépendant de x.

266. Il existe, entre une fonction homogène et ses coefficiens différentiels, des relations particulières qui facilitent beaucoup l'intégration.

Si V désigne une fonction homogène de x, y, etc. et qu'on y substitue tx, ty, etc. au lieu de x, y, etc.

elle prendra nécessairement la forme $t^m V$, m étant la somme des exposans des variables dans chaque terme (255). Supposant ensuite que t devienne $t+g$, on aura $(t+g)^m V$ au lieu de V, ou $(1+g)^m V$, en faisant $t=1$. Dans la même hypothèse x, y, etc. se changeront respectivement en

$$x+gx, y+gy, \text{ etc.}$$

et mettant gx pour h, gy pour k, dans la formule du n° 121, on parviendra à cette équation

$$\left.\begin{array}{l} V+\frac{dV}{dx}gx+\frac{dV}{dy}gy+\text{etc.} \\ +\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}g^2x^2+2\frac{d^2V}{dxdy}g^2xy+\frac{d^2V}{dy^2}g^2y^2+\text{etc.}\right\} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}=(1+g)^m V$$

En développant le second membre, et comparant ensemble les termes affectés de la même puissance de l'indéterminée g, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dV}{dx}x+\frac{dV}{dy}y+\text{etc.}=mV \\ \frac{d^2V}{dx^2}x^2+2\frac{d^2V}{dxdy}xy+\frac{d^2V}{dy^2}y^2=m(m-1)V \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

267. Au moyen de ces relations, le facteur z se présente pour ainsi dire de lui-même dans les équations différentielles homogènes. Si $Mdx+Ndy=0$ est une équation de ce genre, et que la somme des exposans de x et de y dans M et dans N soit égale à m, en supposant que z soit aussi une fonction homogène du degré n, et faisant $zMdx+zNdy=du$, il résulte du théorême démontré numéro précédent, que

$$zMx + zNy = (m+n+1)u,$$

puisque le degré de la fonction u sera nécessairement plus élevé de l'unité que celui des fonctions zM et zN. En divisant la première équation par la seconde, il viendra

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{1}{m+n+1} \cdot \frac{du}{u};$$

et comme le second membre de ce résultat est une différentielle complète, il faudra que le premier membre en soit pareillement une; d'où il suit que $\frac{1}{Mx + Ny}$ sera un des facteurs propres à rendre intégrable l'équation $Mdx + Ndy = 0$.

Des équations du premier ordre, dans lesquelles les différentielles passent le premier degré.

268. Par la génération des équations différentielles, dont j'ai donné plusieurs exemples, n° 43, on voit qu'il peut s'en présenter dans lesquelles les différentielles passent le premier degré. La formule générale de ces équations est

$$dy^n + Pdy^{n-1}dx + Qdy^{n-2}dx^2 \ldots + Tdydx^{n-1} + Udx^n = 0;$$

si on la divise par la plus haute puissance de dx, elle deviendra

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} \ldots + T\frac{dy}{dx} + U = 0:$$

en la résolvant par rapport au coefficient différen-

tiel $\frac{dy}{dx}$, et désignant par p, p', p'', etc. ses racines, on aura

$$\frac{dy}{dx}-p=0, \qquad \frac{dy}{dx}-p'=0, \qquad \frac{dy}{dx}-p''=0, \text{ etc.}$$

résultats qui pourront tous se traiter par les méthodes précédentes, puisque les différentielles ne s'y trouvent qu'au premier degré. L'intégrale de chacun d'eux sera aussi l'intégrale de l'équation proposée, qui sera encore satisfaite par les valeurs tirées de l'équation formée du produit de toutes ces intégrales.

En effet, la proposée étant équivalente à

$$\left(\frac{dy}{dx}-p\right)\left(\frac{dy}{dx}-p'\right)\left(\frac{dy}{dx}-p''\right)\ldots=0,$$

sera vérifiée par toutes les équations qui annulleront un de ces facteurs. De plus, si on considère qu'une équation primitive de la forme

$$MNP\ldots=0,$$

n'a lieu que par l'anéantissement successif de chacun de ses facteurs, on en conclura que la différentielle immédiate de son premier membre, savoir :

$$dM.NP\ldots + dN.MP\ldots + \text{etc.}=0,$$

se réduit toujours à un seul terme; car si on prend, par exemple, $M=0$, il ne restera que $dM.NP\ldots=0$, ou seulement $dM=0$: l'équation $MNP\ldots=0$ vérifiera donc l'équation différentielle à laquelle satisferait l'équation $M=0$.

Les deux exemples suivans, quoique très-simples, éclairciront toutes les difficultés que pourrait renfermer l'énoncé ci-dessus.

1°. Soit $dy^2 - a^2dx^2 = 0$; cette équation se décompose en $dy + adx = 0$, $dy - adx = 0$, dont les intégrales sont $y + ax = c$, $y - ax = c'$; et il est facile de voir que chacun de ces résultats satisfait à la proposée. L'équation $(y + ax - c)(y - ax - c') = 0$ y satisfait aussi, car elle donne

$$(y+ax-c)(dy-adx) + (y-ax-c')(dy+adx) = 0;$$

d'où

$$dy = \frac{[(y+ax-c)-(y-ax-c')]adx}{2y-(c+c')};$$

mettant successivement, au lieu de y, ses valeurs $c - ax$, $c' + ax$, on trouve

$$dy = -adx, \qquad dy = +adx.$$

L'intégrale $(y + ax - c)(y - ax + c') = 0$ renfermant deux constantes arbitraires et irréductibles, paraîtrait plus générale que celles des autres équations du premier ordre qui ne comportent qu'une constante; mais il faut bien faire attention que chacun de ses facteurs doit être considéré isolément, et qu'on n'en tire pas d'autres lignes que celles qui résulteraient d'une intégrale renfermant une seule constante, dont cette équation est aussi susceptible. Cette dernière intégrale s'obtient en faisant $dy = mdx$ dans l'équation différentielle $dy^2 - a^2dx^2 = 0$, qui se change en $m^2 - a^2 = 0$, ce qui détermine la quantité m, dont il faudrait ensuite substituer la valeur dans l'intégrale de $dy = mdx$, qui est $y = mx + c$. Il suit de là que l'intégrale de la proposée est le résultat de l'élimination de m, entre les équations

$$y = mx + c, \qquad m^2 - a^2 = 0;$$

et si on effectue cette opération, il viendra

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 - a^2 = 0.$$

Cette équation primitive étant du second degré, donne, pour chaque valeur particulière de la constante, deux lignes droites, inclinées dans des sens différens, par rapport à l'axe des x; c'est aussi tout ce que fournit l'autre intégrale $(y+ax-c)(y-ax-c')=0$, excepté que chaque facteur ne représente que les lignes inclinées dans le même sens; mais comme en donnant séparément à c et à c' toutes les valeurs possibles, ces quantités passeront nécessairement par les mêmes degrés de grandeur, en assemblant les droites correspondantes aux mêmes valeurs des constantes c et c', on retombera sur les solutions comprises dans l'intégrale $\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 - a^2 = 0$, bornée à la seule constante c.

J'observerai que toute équation qui ne renferme que dy, dx et des quantités constantes, peut être intégrée en y faisant, comme ci-dessus, $dy = m dx$.

2°. Je considère encore l'équation $dy^2 - ax dx^2 = 0$; on en tire $dy + dx\sqrt{ax} = 0$, $dy - dx\sqrt{ax} = 0$, et en intégrant, on aura

$$y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c = 0, \quad y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - c' = 0.$$

Ces équations, ainsi que leur produit, pourront être considérées séparement comme des intégrales de la proposée; mais ce cas-ci diffère du précédent, en ce que les radicaux que contiennent les deux intégrales obtenues, forment entr'elles un lien qui permet de les comprendre

comprendre toutes deux dans une même équation, et avec une seule constante. En effet, si on fait disparaître le radical, dans l'équation

$$y+\tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3}-c=0,$$

on obtient $(y-c)^2=\frac{4}{9}ax^3$. Ce résultat est encore l'intégrale de l'équation proposée, à laquelle il conduira immédiatement par l'élimination de c. Il appartient à une espèce de paraboles, dont chacune des équations irrationnelles ne représente qu'une branche; et le produit de ces équations ne répondrait qu'à des groupes de branches appartenantes à des courbes différentes, mais qui étant assemblées deux à deux pour les mêmes valeurs des constantes, ne donneraient rien de plus que l'intégrale rationnelle.

269. Quoique ce qui précède ne fasse dépendre l'intégration des équations où les différentielles passent le premier degré, que de la résolution des équations algébriques, voici néanmoins quelques cas dans lesquels cette intégration s'opère plus facilement avec le secours d'artifices analytiques appropriés aux circonstances et qui éludent, au moins en partie, les difficultés que présente la résolution de l'équation différentielle proposée, par rapport à $\frac{dy}{dx}$.

Quand cette équation ne contient que l'une des deux variables, x, par exemple, on en tire immédiatement $\frac{dy}{dx}=X$, d'où $y=\int X dx$; mais s'il est plus facile de la résoudre par rapport à x que par rapport au coefficient $\frac{dy}{dx}$, que je représenterai pour abréger par p, et qu'on ait $x=P$, P désignant une fonction

quelconque de p, on observera que l'équation $\frac{dy}{dx}=p$, ou $dy=pdx$, donne $y=px-\int xdp$; mettant pour x sa valeur P, il viendra $y=Pp-\int Pdp$: l'intégrale demandée sera donc le résultat de l'élimination de p, entre les deux équations

$$x=P,\ y=Pp-\int Pdp.$$

Soit, par exemple, $xdx+ady=b\sqrt{dx^2+dy^2}$, ou $x+ap=b\sqrt{1+p^2}$, en écrivant p au lieu de $\frac{dy}{dx}$. Cette dernière équation donne immédiatement

$$x=-ap+b\sqrt{1+p^2},\quad P=-ap+b\sqrt{1+p^2},$$

et parconséquent

$$y=bp\sqrt{1+p^2}-\tfrac{1}{2}ap^2-b\int dp\sqrt{1+p^2}.$$

270. Je traiterai encore le cas où les deux variables entrent en même temps dans l'équation proposée; mais en supposant que l'une d'elles, y, par exemple; n'y monte qu'au premier degré. On obtient alors y égal à une fonction de x et de p, ensorte que

$$dy=Rdx+Sdp,$$

et parconséquent

$$pdx=Rdx+Sdp \quad \text{ou} \quad (R-p)\,dx+Sdp=0.$$

Si l'on parvenait à intégrer cette dernière, on aurait entre p, x et une constante arbitraire, une relation, au moyen de laquelle chassant p de l'équation proposée, on obtiendrait une équation primitive, qui, renfermant une constante arbitraire, serait l'intégrale cherchée.

Voici une formule très-étendue et très-remarquable,

comprise dans le cas général, et dont l'intégration s'exécute facilement.

Si l'équation proposée peut être mise sous la forme $y = px + P$, et que P ne renferme que le coefficient p, on aura $dy = pdx + \left(x + \frac{dP}{dp}\right) dp$; et puisque $dy = pdx$, il restera l'équation $\left(x + \frac{dP}{dp}\right) dp = 0$, qui se décomposera en deux facteurs $x + \frac{dP}{dp} = 0$, $dp = 0$. Éliminant p entre le premier et l'équation proposée, on aura une équation primitive qui satisfera à la proposée, mais qui, ne contenant point de constante arbitraire, ne sera que particulière. Le second facteur s'intègre et donne $p = c$, ou $dy = cdx$ et $y = cx + c'$. Les constantes c et c' ne sont pas arbitraires toutes deux; car en faisant dans l'équation proposée $p = c$, on a $y = cx + C$, C étant ce que devient P dans la même circonstance, et on tire de là $c' = C$: l'intégrale de la proposée est donc $y = cx + C$, et s'obtient en changeant p en c.

Soit pour exemple l'équation

$$ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Elle se met d'abord sous la forme

$$y = px + n\sqrt{1 + p^2};$$

en la différentiant on trouve

$$dy = pdx + xdp + \frac{npdp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

et à cause que $dy = pdx$, il restera

$$xdp+\frac{npdp}{\sqrt{1+p^2}}=0.$$

Cette équation se décompose en deux facteurs

$$x+\frac{np}{\sqrt{1+p^2}}=0,\ \text{et}\ dp=0;$$

le second conduit à $p=c$, et l'intégrale demandée est

$$y=cx+\sqrt{1+c^2}.$$

Le premier facteur donne

$$p=\pm\frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}},\ \sqrt{1+p^2}=-\frac{np}{x}=\mp\frac{n}{\sqrt{n^2-x^2}};$$

substituant dans l'équation proposée, on a $y^2+x^2=n^2$, équation qui ne renferme point de constante arbitraire, qui n'est point comprise dans l'intégrale

$$y=cx+n\sqrt{1+c^2},$$

et telle néanmoins que les valeurs de y et de dy, qui s'en déduisent, satisfont à l'équation différentielle proposée, dont elle offre parconséquent une *solution particulière*. Je reviendrai dans la suite sur ce genre de solutions.

De l'intégration des équations différentielles du second ordre et des ordres supérieurs.

271. La difficulté d'intégrer les équations devient d'autant plus grande que ces équations sont d'un ordre plus élevé; et l'on n'y réussit guère que par rapport à un petit nombre d'équations très-limitées. On a déjà vu dans le n° 220, comment il faut traiter les

équations de la forme $\frac{d^n y}{dx^n} = X$, X désignant une fonction de x; c'est pourquoi je passerai tout de suite à celles qui ne renferment que deux coefficiens différentiels.

Dans le second ordre, ces équations ne contiennent que $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$; et lorsqu'on y fait pour abréger $\frac{dy}{dx} = p$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, elles conduisent à $\frac{dp}{dx} = P$, P étant une fonction de p. On tire de là $dx = \frac{dp}{P}$, et parconséquent $x = \int \frac{dp}{P}$; mettant pour dx sa valeur dans l'équation $dy = pdx$, on trouve aussi $y = \int \frac{pdp}{P}$: il ne s'agit plus que d'éliminer p entre les deux équations $x = C + \int \frac{dp}{P}$ et $y = C' + \int \frac{pdp}{P}$, pour avoir l'intégrale en x et y. Elle sera complète, car elle renfermera deux constantes arbitraires; et il suit en effet du n° 44, que l'intégrale de toute équation du second ordre n'en peut contenir qu'un pareil nombre. L'élimination de p ne pourra se faire que lorsqu'on aura effectué les intégrations indiquées; mais par les quadratures on construira la courbe cherchée.

Soit pour exemple l'équation $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = a$. En mettant pdx pour dy, et $dpdx$ pour d^2y, on changera cette équation en $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp} = a$, et on en tirera

$$dx=\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\quad dy=pdx=\frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégration donnera

$$x=C+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\quad y=C'-\frac{a}{\sqrt{1+p^2}};$$

éliminant p, il viendra $(x-C)^2+(y-C')^2=a^2$.

L'équation différentielle proposée n'est autre chose que l'expression générale du rayon de courbure, égalée à une constante a (99) ; et, comme on devait s'y attendre, l'intégrale est l'équation du cercle ayant cette constante pour rayon.

272. Il est à propos de remarquer que les équations $x=C+\int\frac{dp}{P}$ et $y=C'+\int\frac{pdp}{P}$ satisfont, chacune en particulier, à l'équation différentielle $\frac{dp}{dx}=P$, et qu'en supposant les seconds membres intégrés, elles ne seraient que du premier ordre : il y a donc dans ce cas deux équations de cet ordre qui satisfont à l'équation proposée du second, et qui en sont parconséquent les intégrales, tandis qu'une équation du premier ordre n'a qu'une seule intégrale. Il est facile d'appercevoir la raison de cette différence.

Soit $U=0$, une équation primitive entre x, y et deux constantes C et C' : si on différentie deux fois de suite cette équation, on pourra éliminer entre $U=0$, $dU=0$, $d^2U=0$, les deux constantes, et arriver ainsi à une équation du second ordre qui en soit indépendante ; mais la combinaison des équations $U=0$ et $dU=0$, conduira à deux équations différentes du premier ordre :

l'une résultera de l'élimination de C', et l'autre de celle de C. Je les désigne par $V=0$, $V'=0$; il est évident que l'on parviendra à l'équation du second ordre, en éliminant C entre $V=0$ et $dV=0$, ou bien C' entre $V'=0$ et $dV'=0$: chacune des équations $V=0$, $V'=0$, est donc l'intégrale de celle du second ordre. On les appelle *intégrales premières*, pour les distinguer de l'équation primitive $U=0$, qui est l'*intégrale seconde*.

Il est facile de voir que l'on déduira l'équation $U=0$, des deux équations $V=0$ et $V'=0$, en éliminant entr'elles le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}=0$, et que parconséquent on aura l'intégrale seconde, ou l'équation primitive d'une équation du second ordre, lorsque l'on connaîtra ses deux intégrales premières, et qu'on pourra en chasser $\frac{dy}{dx}$.

Ces remarques s'étendent aux équations de tous les ordres. Pour le troisième, par exemple, l'équation primitive doit contenir trois constantes arbitraires (44); et l'on parvient à l'équation différentielle de cet ordre, en éliminant ces constantes entre les équations

$$U=0,\quad dU=0,\quad d^2U=0,\quad d^3U=0;$$

mais si on ne chasse que deux constantes, on aura trois équations différentielles du second ordre, puisqu'on pourra conserver chacune des trois constantes à son tour. Les équations qu'on obtient ainsi, sont des *intégrales premières* de l'équation différentielle du troisième ordre, qui résultera nécessairement de l'élimination de la constante qu'elles renferment. Les *intégrales secondes* sont ici les équations du premier ordre que donne l'élimination de chacune des constantes, entre les équations $U=0$

et $dU=0$, et l'équation primitive $U=0$ est l'*intégrale troisième*. Sans pousser plus loin ces considérations, on doit en conclure qu'*une équation différentielle de l'ordre* n *a un nombre* n *d'intégrales premières*, et comme ces intégrales sont de l'ordre $n-1$, elles ne renferment que les $n-1$ coefficiens

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}:$$

si donc on peut les éliminer, on aura l'intégrale n^{me}, ou l'équation primitive qui répond à l'équation différentielle proposée.

273. On ramène en général à l'intégration des fonctions d'une seule variable, les équations d'un ordre quelconque, dans lesquelles un coefficient différentiel est exprimé par celui de l'ordre immédiatement inférieur. En effet, si l'on avait, par exemple, $\frac{d^3y}{dx^3}$ en fonction de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on ferait $\frac{d^2y}{dx^2}=q$, d'où il résulterait $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dq}{dx}$; et parconséquent l'équation proposée serait transformée en $\frac{dq}{dx}=Q$, Q représentant une fonction donnée de q. On conclurait de cette dernière équation

$$dx=\frac{dq}{Q}, \qquad x=\int\frac{dq}{Q}+C;$$

puis de $\frac{d^2y}{dx^2}=q$, on tirerait successivement

$$\frac{dy}{dx}=\int q dx=\int\frac{qdq}{Q}+C',$$

$$y=\int dx\int q dx=\int\frac{dq}{Q}\left(\int\frac{qdq}{Q}+C'\right)+C'';$$

l'intégrale demandée serait donc le résultat de l'élimination de q entre les deux équations

$$x=\int\frac{dq}{Q}+C,\quad y=\int\frac{dq}{Q}\left(\int\frac{qdq}{Q}+C'\right)+C'',$$

et il y aurait trois constantes arbitraires dans le résultat. On étendrait facilement ce procédé à un ordre quelconque.

274. Je m'occuperai dans cet article de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}=Y$, Y désignant une fonction quelconque de y. Si on fait $dy=pdx$, on peut en tirer $dx=\frac{dy}{p}$, ce qui donne $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{pdp}{dy}$: substituant dans la proposée, il en résulte $pdp=Ydy$; et en intégrant, on trouve $p^2=2\int Ydy+C$, d'où il suit

$$p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{C+2\int Ydy}\quad\text{et}\quad x=\int\frac{dy}{\sqrt{C+2\int Ydy}}+C'.$$

Il est bon d'observer que l'intégration ci-dessus peut s'effectuer en multipliant la proposée par dy; car il vient alors $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx}=Ydy$, et comme $\frac{d^2y}{dx}=d.\frac{dy}{dx}$, on a $\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\int Ydy+C$, ou $\frac{dy}{dx}=\sqrt{2C+2\int Ydy}$.

Si on applique ce procédé à l'équation

$$d^2y\sqrt{ay}=dx^2,$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{ay}},\quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx}=\frac{dy}{\sqrt{ay}},$$

$$\text{et}\ \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2}{a}\sqrt{ay}+C,$$

en intégrant. Changeant C en $\frac{2c}{\sqrt{a}}$, on tirera de là

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{4}{\sqrt{a}}(\sqrt{y}+c),\ \frac{2dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{dy}{\sqrt{c+\sqrt{y}}};$$

faisant ensuite $c+\sqrt{y}=z$, il viendra

$$\frac{dx}{\sqrt[4]{a}}=\frac{(z-c)dz}{\sqrt{z}}=(z^{\frac{1}{2}}-cz^{-\frac{1}{2}})\,dz,$$

et enfin

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a}}=\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-2cz^{\frac{1}{2}}+c'=\tfrac{2}{3}(\sqrt{y}-c)\sqrt{c+\sqrt{y}}+c'.$$

275. La méthode suivie dans le n° précédent ramène en général à l'intégration des fonctions d'une seule variable, les équations d'un ordre quelconque, dans lesquelles un coefficient différentiel est donné par celui de l'ordre inférieur de deux unités. Si l'on avait, par exemple, $\frac{d^4y}{dx^4}$ en fonction de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on représenterait $\frac{d^2y}{dx^2}$, par q, d'où il suivrait

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dq}{dx},\quad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2q}{dx^2};$$

et la proposée serait transformée en

$$\frac{d^2q}{dx^2}=Q,$$

Q désignant une fonction donnée de q. En multipliant alors les deux membres par dq, il viendrait

$$\frac{dq}{dx} \cdot \frac{d^2q}{dx} = Qdq\,;$$

d'où on tirerait, comme dans le n° précédent,

$$\frac{1}{2}\frac{dq^2}{dx^2} = \int Qdq\,, \quad \frac{dq}{dx} = \sqrt{2\int Qdq + C}\,,$$

$$dx = \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq + C}}\,, \quad x = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq + C}} + C'\,;$$

mais de $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, on conclut successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int q dx = \int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq + C}} + C''\,,$$

$$y = \int dx \int q dx = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq + C}} \left(\int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq + C}} + C'' \right) + C''':$$

l'intégrale serait parconséquent le résultat de l'élimination de q, entre les deux équations

$$x = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq + C}} + C'\,,$$

$$y = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq + C}} \left(\int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq + C}} + C'' \right) + C'''\,,$$

contenant quatre constantes arbitraires. On traiterait de même les équations analogues, dans les ordres plus élevés.

276. On a vu dans le Calcul différentiel (115), que passé le premier ordre, la forme des équations différentielles changeait, suivant qu'on prenait x ou y, ou même une fonction de ces quantités, pour *variable indépendante*, et que cela revenait à regarder successivement comme constante dx, ou dy, ou une

fonction donnée de ces différentielles et de leurs variables; il est donc nécessaire, lorsqu'on se propose d'intégrer une équation qui passe le premier ordre, de savoir dans laquelle de ces hypothèses elle a été calculée. Les exemples précédens répondaient tous à la supposition de y égal à une fonction de x, et parconséquent de dx constant; mais il sera facile de reconnaître parmi les équations relatives à d'autres hypothèses, celles qui peuvent s'y rapporter.

Il est d'abord évident, qu'en désignant par Q une fonction quelconque de $\frac{dx}{dy}$, toute équation de la forme $\frac{d^2x}{dy^2}=Q$, et dans laquelle dy est regardé comme constant, se traitera de même que celle du n° 271, en faisant $\frac{dx}{dy}=q$, et $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{dq}{dy}$. On peut encore la ramener immédiatement à la forme $\frac{d^2y}{dx^2}=P$, en passant, par le procédé du n° 116, à la supposition de dx constant, ce qui se fera, par la substitution de $-\frac{dxd^2y}{dy^3}$, à la place de $\frac{d^2x}{dy^2}$.

Si l'équation proposée eût été prise dans l'hypothèse de $\sqrt{dx^2+dy^2}$ constant, et qu'elle ne renfermât que dx, dy, d^2y, ou dy, dx, d^2x, elle rentrerait encore dans le cas du n° 271, après qu'on l'aurait transformée en une autre dans laquelle dx fût constant.

277. Je passe maintenant aux équations qui contiennent les deux coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, et la

variable indépendante x. Il est évident que ces équations se ramènent sur-le-champ au premier ordre, par la substitution de pdx et de $dpdx$, au lieu de dy et de d^2y. Si on peut intégrer la transformée, et que l'on parvienne à en tirer l'expression de p en x, on obtiendra y par l'équation $y=\int pdx$; et si cette transformée donnait x en p, on ferait usage de la formule

$$y=px-\int xdp \text{ (269).}$$

Je ne m'arrêterai point à détailler les différens cas intégrables que présentent les équations proposées; ils se découvriront aisément par l'application des divers procédés enseignés précédemment pour intégrer les équations du premier ordre.

Si les équations proposées étaient entre $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ et y, on les ramènerait au cas précédent, en prenant dy constant, au lieu de dx, ou bien en chassant dx, au moyen de sa valeur $\frac{dy}{p}$, tirée de l'équation $dy=pdx$; et on aurait ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{pdp}{dy}:$$

la transformée ne renfermerait alors que p, dp et dy. Si elle pouvait s'intégrer, et qu'elle donnât p en y, on trouverait x par la formule $x=\int\frac{dy}{p}$, et par la formule $x=\frac{y}{p}+\int\frac{ydp}{p^2}$, lorsqu'on aurait y en p.

Soit, par exemple, l'équation différentielle

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}=X,$$

X désignant une fonction donnée de x seul ; cette équation se transforme en

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dx}{dp}=X,$$

ou

$$\frac{dx}{X}=\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant il vient

$$\int\frac{dx}{X}+C=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}};$$

je représente $\int\frac{dx}{X}+C$ par V, et il en résulte

$$p=\frac{V}{\sqrt{1-V^2}},\ y=\int p dx+C'=\int\frac{Vdx}{\sqrt{1-V^2}}+C'.$$

Il n'est pas difficile de remarquer que les procédés de cet article et du précédent, ramèneraient à l'ordre inférieur, toute équation d'un ordre quelconque, où il n'entrerait qu'une des variables et les coefficiens différentiels de l'une ou de l'autre.

278. Il existe encore dans le second ordre, d'autres formes d'équations dont on peut obtenir les équations primitives, ou au moins la réduction au premier ordre; mais elles sont trop particulières pour trouver place ici. Ce qu'il y a de plus remarquable dans cet ordre et dans les suivans, ce sont les propriétés des équations du premier degré, équations formées d'après celle du n° 257, et dont le caractère est de ne contenir la fonction cherchée et ses différentielles qu'au premier degré. La forme de ces équations est dans le second ordre

$$d^2y+Pdydx+Qydx^2=Rdx^2,$$

dans le troisième

$$d^3y + Pd^2ydx + Qdydx^2 + Rydx^3 = Sdx^3,$$

et en général

$$d^ny + Pd^{n-1}ydx + Qd^{n-2}ydx^2 \ldots + Uydx^n = Vdx^n$$

les lettres P, Q,..... U et V, désignant des fonctions données de x.

L'équation du premier degré et du second ordre

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = Rdx^2,$$

se ramène à l'équation

$$d^2z + Pdzdx + Qzdx^2 = 0,$$

par la même transformation qui a servi dans le n° 257 à faire dépendre

$$dy + Pydx = Qdx, \text{ de } dz + Pzdx = 0.$$

En effet, la supposition de $y = Xz$ donne

$$dy = Xdz + zdX,$$
$$d^2y = Xd^2z + 2dXdz + zd^2X,$$

et change l'équation proposée en

$$X(d^2z + Pdzdx + Qzdx^2)$$
$$+ 2dXdz + PzdXdx + zd^2X = Rdx^2.$$

Si on fait

$$d^2z + Pdzdx + Qzdx^2 = 0,$$

et qu'on parvienne à tirer de cette équation la valeur de z en x, on aura pour déterminer la fonction X, l'équation

$$2dXdz + PzdXdx + zd^2X = Rdx^2,$$

qui, par rapport aux variables x et X, rentre dans celles du n° 277; et faisant $dX = X'dx$, elle se changera en

$$2X'dz + PzX'dx + zdX' = Rdx,$$

ou $$dX' + \left(P + \frac{2dz}{zdx}\right) X'dx = \frac{Rdx}{z}.$$

Cette équation n'étant que du premier degré et du premier ordre par rapport à X', conduit (257) à

$$X' = e^{-\int\left(Pdx + \frac{2dz}{z}\right)} \left[\int e^{\int\left(Pdx + \frac{2dz}{z}\right)} \frac{Rdx}{z} + C\right],$$

résultat qui devient

$$X' = \frac{e^{-\int Pdx}}{z^2} \left[\int e^{\int Pdx} Rzdx + C\right],$$

en observant que

$$e^{-\int\frac{2dz}{z}} = \frac{1}{z^2}, \qquad e^{\int\frac{2dz}{z}} = z^2;$$

on aura ensuite

$$X = \int X'dx + C, \quad y = z\int X'dx + C'z.$$

279. Il faut bien remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'avoir l'intégrale complète de l'équation

$$d^2z + Pdzdx + Qzdx^2 = 0,$$

mais seulement une valeur particulière de z, qui y satisfasse; car les constantes arbitraires sont comprises implicitement dans l'expression de y.

Le

Le calcul précédent fait voir encore que de cette valeur de z on déduirait aussi l'intégrale complète de l'équation en z ; car si l'on fait $R=0$, l'équation en y deviendra semblable à celle-ci, on aura

$$X'=\frac{Ce^{-\int Pdx}}{z^2},\qquad X=\int X'dx+C';$$

et
$$y=z\int X'dx+C'z$$

sera l'intégrale complète de l'équation

$$d^2y+Pdydx+Qydx^2=0,$$

z étant alors une valeur particulière de y.

280. L'équation

$$d^2z+Pdzdx+Qzdx^2=0$$

se ramène au premier ordre, en faisant $z=e^{\int tdx}$, t désignant une nouvelle variable ; car on a par ce moyen

$$dz=e^{\int tdx}tdx,\qquad d^2z=e^{\int tdx}(t^2dx^2+dtdx);$$

la fonction $e^{\int tdx}$ devient facteur commun de l'équation proposée qui se réduit à

$$t^2dx^2+dtdx+Ptdx^2+Qdx^2=0,$$

ou à
$$dt+(t^2+Pt+Q)\,dx=0\ (*).$$

Lorsque les coefficiens P et Q sont constans, je les désigne par A et B : l'équation

$$dt+(t^2+Pt+Q)\,dx=0$$

(*) Il est bon de remarquer que la transformation effectuée ci-dessus ramènera en général, au premier ordre toute équation du second, homogène par rapport aux quantités z, dz, d^2z, considérées comme des variables distinctes.

devient

$$dt + (t^2 + At + B)\,dx = 0,$$

et se trouve séparée en lui donnant la forme

$$\frac{dt}{(t^2 + At + B)} + dx = 0;$$

mais comme on n'a besoin que d'y satisfaire, on aperçoit facilement que si l'on fait $t = m$, m étant une constante, on aura $dt = 0$, et

$$m^2 + Am + B = 0.$$

Cette dernière équation donne en général deux valeurs pour m; si on les représente par m' et m'', on aura aussi pour $e^{\int t dx}$ deux valeurs, savoir :

$$e^{\int m' dx} = e^{m' x}, \qquad e^{\int m'' dx} = e^{m'' x};$$

on aura donc en même temps deux valeurs particulières de z, savoir

$$z = e^{m' x} \text{ et } z = e^{m'' x}.$$

On pourrait avec l'une de ces valeurs trouver, comme il a été indiqué plus haut, la valeur complète de z; mais dans les équations du second ordre, de la forme de celles-ci, on obtient sur-le-champ la valeur complète de la fonction, lorsqu'on en a deux valeurs particulières z' et z'', en prenant

$$z = Cz' + C'z'',$$

C et C' désignant deux constantes arbitraires; car si l'on substitue cette valeur et ses différentielles, et qu'on rassemble les termes multipliés par la même constante, on trouvera

$$C\,(d^2z' + Pdz'dx + Qz'dx^2)$$
$$+ C'\,(d^2z'' + Pdz''dx + Qz''dx^2),$$

résultat qui s'anéantit, indépendamment des constantes C et C', puisque les quantités qui multiplient ces constantes s'évanouissent en meme temps que le premier membre de l'équation proposée.

281. Quand les valeurs de m sont imaginaires, et parconséquent de la forme

$$m'=\alpha+\beta\sqrt{-1}, \qquad m''=\alpha-\beta\sqrt{-1},$$

on a

$$z=Ce^{\alpha x+\beta x\sqrt{-1}}+C'e^{\alpha x-\beta x\sqrt{-1}}$$
$$=e^{\alpha x}(Ce^{\beta x\sqrt{-1}}+C'e^{-\beta x\sqrt{-1}});$$

on rend ce résultat réel, en exprimant les exponentielles imaginaires, par le moyen des sinus et des cosinus. Il vient (164)

$$e^{\beta x\sqrt{-1}}=\cos\beta x+\sqrt{-1}\sin\beta x,$$
$$e^{-\beta x\sqrt{-1}}=\cos\beta x-\sqrt{-1}\sin\beta x,$$
$$z=e^{\alpha x}[(C+C')\cos\beta x+(C-C')\sqrt{-1}\sin\beta x];$$

et faisant

$$C+C'=c, \qquad (C-C')\sqrt{-1}=c',$$

on a

$$z=e^{\alpha x}(c\cos\beta x+c'\sin\beta x);$$

ou bien

$$z=pe^{\alpha x}\sin(\beta x+q),$$

en prenant

$$c=p\sin q, \qquad c'=p\cos q.$$

Lorsque les racines m' et m'' sont égales, la valeur de z, réduite à

$$Ce^{m'x}+C'e^{m'x}=(C+C')e^{m'x},$$

Cc 2

devient incomplète ; il faudrait dans ce cas se servir de la valeur particulière $z = e^{m'x}$ pour obtenir l'intégrale complète, suivant le procédé du n° 279 ; mais on y parvient plus facilement par des considérations analogues à celles du n° 56, en supposant que m'' diffère de m' d'une quantité très-petite.

Soit en général $m'' = m' + k$; il en résulte

$$z = Ce^{m'x} + C'e^{m'x+kx} = e^{m'x}(C + C'e^{kx});$$

développant e^{kx} suivant les puissances de k, on a

$$z = e^{m'x}\left(C + C' + C'kx + C'\frac{k^2x^2}{2} + \text{etc.}\right)$$

$$= e^{m'x}\left(c + c'x + c'\frac{kx^2}{2} + \text{etc.}\right)$$

en posant

$$C + C' = c, \quad C'k = c'.$$

Cette dernière expression, qui satisfait à la proposée pour toutes les valeurs de k, convient encore, si $k = 0$, ou $m'' = m'$, et se réduit alors à

$$z = e^{m'x}(c + c'x).$$

282. Soit maintenant l'équation plus générale

$$d^2y + Adydx + Bydx^2 = Rdx^2.$$

On a pour l'équation

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = Rdx^2,$$

d'après les formules du n° 278,

$$y = z\int X'dx + C'z$$

$$= C'z + z\int \frac{e^{-\int Pdx}}{z^2}dx\left(\int e^{\int Pdx}Rzdx + C\right);$$

cette expression, renfermant deux constantes arbitraires, est complète, ensorte qu'il ne s'agit plus que d'y substituer une valeur particulière de z. L'équation proposée, dépend de

$$d^2z + Adzdx + Bzdx^2 = 0;$$

et comme les coefficiens A et B sont constans, on satisfait à cette dernière en supposant $z = e^{mx}$,

$$m^2 + Am + B = 0:$$

on aura donc, à cause de $P = A$,

$$y = C'e^{mx} + e^{mx}\int e^{-(A+2m)x}dx\left(\int e^{(A+m)x}Rdx + C\right)$$

$$= C'e^{mx} - \frac{Ce^{-(A+m)x}}{A+2m} + e^{mx}\int e^{-(A+2m)x}dx\int e^{(A+m)x}Rdx.$$

En intégrant par parties, on trouvera que

$$\int e^{-(A+2m)x}dx\int e^{(A+m)x}Rdx$$

$$= \frac{-e^{-(A+2m)x}\int e^{(A+m)x}Rdx + \int e^{-mx}Rdx}{A+2m} \text{ (*)};$$

si on substitue cette valeur dans l'expression de y, et qu'après les réductions on mette n à la place $-(A+m)$ il viendra

$$y = C'e^{mx} - \frac{Ce^{nx}}{m-n}$$

$$+ \frac{e^{mx}\int e^{-mx}Rdx - e^{nx}\int e^{-nx}Rdx}{m-n},$$

(*) La formule à intégrer ici revient à

$$\int dU\int Vdx = U\int Vdx - \int UVdx \text{ (221)}.$$

ou, changeant la forme des constantes arbitraires,

$$y = ce^{mx} + c'e^{nx} + \frac{e^{mx}\int e^{-mx} R\mathrm{d}x - e^{nx}\int e^{-nx} R\mathrm{d}x}{m-n}.$$

Il est facile de voir que la quantité n est la seconde racine de l'équation $m^2 + Am + B = 0$, puisque, par l'hypothèse $m + n = -A$.

Lorsque ces racines sont imaginaires, on transforme l'expression de y par le moyen des sinus et des cosinus, comme dans le n° 281 ; ou bien en supposant dans l'expression générale de y,

$$z = e^{\alpha x}\cos\beta x, \text{ ou } z = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

valeurs particulières qui résultent de la seconde expression complète de z, dans le n° cité, lorsqu'on fait $c = 0$, ou $c' = 0$, et en intégrant par parties, on trouve

$$y = e^{\alpha x}[p\cos\beta x + q\sin\beta x]$$

$$+ \frac{e^{\alpha x}[\sin\beta x\int e^{-\alpha x} R\mathrm{d}x\cos\beta x - \cos\beta x\int e^{-\alpha x} R\mathrm{d}x\sin\beta x]}{\beta}.$$

Dans le cas où l'on a $m = n$, l'expression trouvée plus haut pour y devient incomplète, comme dans le n° déjà cité, et la seconde partie de cette expression se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$; mais on élude cette difficulté en observant que A devient égal à $-2m$, et que dans cette hypothèse l'équation

$$y = Ce^{mx} + e^{mx}\int e^{-(A+2m)x}\mathrm{d}x\left(\int e^{(A+m)x} R\mathrm{d}x + C\right)$$

se réduit à

$$y = C'e^{mx} + e^{mx}\int \mathrm{d}x\left(\int e^{-mx} R\mathrm{d}x + C\right);$$

en intégrant on trouve

$$y = C'e^{mx} + e^{mx}(Cx + x\int e^{-mx}R\mathrm{d}x - \int e^{-mx}Rx\mathrm{d}x),$$

ou

$$y = e^{mx}(Cx + C') + e^{mx}(x\int e^{-mx}R\mathrm{d}x - \int e^{-mx}Rx\mathrm{d}x).$$

On rencontre fréquemment, dans les applications de l'Analyse à la Physique céleste, l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a^2y = R,$$

pour laquelle

$$m = a\sqrt{-1}, \text{ ou } \alpha = 0 \text{ et } \beta = a;$$

son intégrale sera donc

$$y = p\cos ax + q\sin ax$$
$$+ \frac{\sin ax\int R\mathrm{d}x\cos ax - \cos ax\int R\mathrm{d}x\sin ax}{a}.$$

La fonction R a ordinairement la forme

$$A + B\cos\beta x + C\cos\gamma x + \text{etc.}$$

$A, B, C,$ etc. étant des coefficiens constans, $\beta, \gamma,$ etc. désignant des nombres entiers ; et les intégrations indiquées s'effectuent par le procédé du n° 196.

283. L'intégration de l'équation

$$\mathrm{d}^2z + P\mathrm{d}z\mathrm{d}x + Qz\mathrm{d}x^2 = 0,$$

peut rarement s'effectuer, lorsque les coefficiens P et Q sont variables ; on y réussit, par exemple, lorsque

$$P = \frac{A}{a + bx}, \qquad Q = \frac{B}{(a + bx)^2}.$$

On a (280)

$$dt + \left(t^2 + \frac{At}{a+bx} + \frac{B}{(a+bx)^2}\right)dx = 0;$$

faisant

$$(a+bx)\,t = m,$$

il vient

$$(a+bx)\,dm + (m^2 + (A-b)\,m + B)\,dx = 0.$$

On satisfait encore à cette équation en prenant

$$dm = 0 \text{ et } m^2 + (A-b)\,m + B = 0,$$

d'où on tire deux valeurs de t, savoir :

$$t = \frac{m'}{a+bx}, \quad t = \frac{m''}{a+bx};$$

mais puisque

$$z = e^{\int t dx} = e^{\int \frac{m dx}{a+bx}} = (a+bx)^{\frac{m}{b}},$$

on aura

$$z = C\,(a+bx)^{\frac{m'}{b}} + C'\,(a+bx)^{\frac{m''}{b}}.$$

284. L'équation générale

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 \ldots + U y dx^n = V dx^n,$$

jouit de propriétés analogues à celles que je viens d'exposer sur l'équation du premier degré et du second ordre.

1°. Lorsque le terme $V dx^n$ y manque, ou qu'elle est de la forme

$$d^n z + P d^{n-1} z dx + Q d^{n-2} z dx^2 \ldots + U z dx^n = 0,$$

il suffit de connaître un nombre n de valeurs parti-

culières de z, pour obtenir sur-le-champ l'expression générale de cette fonction, ensorte que si on désigne par z_1, z_2, z_3, ... z_n, ces valeurs, on aura

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 \ldots\ldots + C_n z_n,$$

C_1, C_2, ... C_n, étant des constantes arbitraires.

Cette proposition est facile à prouver; car il est évident que chacune des équations

$$C_1(d^n z_1 + P d^{n-1} z_1 dx + Q d^{n-2} z_1 dx^2 \ldots + U z_1 dx^n) = 0$$
$$C_2(d^n z_2 + P d^{n-1} z_2 dx + Q d^{n-2} z_2 dx^2 \ldots + U z_2 dx^n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n(d^n z_n + P d^{n-1} z_n dx + Q d^{n-2} z_n dx^2 \ldots + U z_n dx^n) = 0,$$

étant identique, par l'hypothèse, leur somme donnera une équation identique qui sera précisément celle qu'on obtiendrait en mettant dans la proposée, à la place de z et de ses différentielles, les valeurs qui résultent de l'expression générale de z.

2°. On peut faire dépendre l'intégration de l'équation

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 \ldots + U y dx^n = V dx^n$$

de celle de l'équation

$$d^n z + P d^{n-1} z dx + Q d^{n-2} z dx^2 \ldots + U z dx^n = 0.$$

Cela se prouve facilement, en supposant que la valeur de y soit de la même forme que celle de z, mais que les quantités C_1, C_2, C_3,... au lieu d'être constantes comme ci-dessus, soient des fonctions de x.

Pour fixer les idées, je prends l'équation proposée du

troisième ordre seulement : il vient $y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$, expression dans laquelle il faut déterminer C_1, C_2 et C_3, de manière qu'elle satisfasse à

$$d^3y + Pd^2ydx + Qdydx^2 + Uydx^3 = Vdx^3.$$

Si on forme successivement les valeurs de dy, d^2y et d^3y, en traitant C_1, C_2, C_3, comme des variables ; on trouvera d'abord

$$dy = C_1dz_1 + C_2dz_2 + C_3dz_3 + z_1dC_1 + z_2dC_2 + z_3dC_3 ;$$

mais comme on a trois quantités à déterminer, et que la question proposée n'offre qu'une condition, on en peut choisir deux autres à volonté, et faire en conséquence

$$z_1dC_1 + z_2dC_2 + z_3dC_3 = 0,$$

ce qui donnera

$$dy = C_1dz_1 + C_2dz_2 + C_3dz_3.$$

En différentiant cette valeur, il viendra

$$d^2y = C_1d^2z_1 + C_2d^2z_2 + C_3d^2z_3 + dz_1dC_1 + dz_2dC_2 + dz_3dC_3 ;$$

posant encore

$$dz_1dC_1 + dz_2dC_2 + dz_3dC_3 = 0,$$

il restera

$$d^2y = C_1d^2z_1 + C_2d^2z_2 + C_3d^2z_3,$$

d'où on tirera

$$d^3y = C_1d^3z_1 + C_2d^3z_2 + C_3d^3z_3 + d^2z_1dC_1 + d^2z_2dC_2 + d^2z_3dC_3.$$

Par la substitution des valeurs de y, dy, d^2y et d^3y,

l'équation proposée deviendra

$$\left.\begin{array}{l} C_1(d^3z_1+Pd^2z_1dx+Qdz_1dx^2+Uz_1dx^3) \\ +C_2(d^3z_2+Pd^2z_2dx+Qdz_2dx^2+Uz_2dx^3) \\ +C_3(d^3z_3+Pd^2z_3dx+Qdz_3dx^2+Uz_3dx^3) \\ +d^2z_1dC_1+d^2z_2dC_2+d^2z_3dC_3 \end{array}\right\} = Vdx^3,$$

et se réduira à

$$d^2z_1dC_1+d^2z_2dC_2+d^2z_3dC_3 = Vdx^3,$$

puisque les fonctions z_1, z_2 et z_3, satisfont à l'équation

$$d^3z+Pd^2zdx+Qdzdx^2+Uzdx^3=0:$$

il existera donc entre les différentielles dC_1, dC_2 et dC_3, les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} z_1dC_1+z_2dC_2+z_3dC_3=0 \\ dz_1dC_1+dz_2dC_2+dz_3dC_3=0 \\ d^2z_1dC_1+d^2z_2dC_2+d^2z_3dC_3=Vdx^3 \end{array}\right\},$$

dont on tirera les valeurs de chacune de ces différentielles, exprimées en x et en dx, lorsque celles de z_1, z_2, z_3, etc. seront connues. On en déduira par l'élimination des résultats de la forme

$$dC_1=X_1dx, \quad dC_2=X_2dx, \quad dC_3=X_3dx,$$

d'où

$$C_1=\int X_1dx+c_1, \quad C_2=\int X_2dx+c_2, \quad C_3=\int X_3dx+c_3;$$

et parconséquent

$$y=z_1(\int X_1dx+c_1)+z_2(\int X_2dx+c_2)+z_3(\int X_3dx+c_3)$$

sera l'intégrale complète de l'équation proposée.

Si l'on ne connaissait que deux valeurs particulières

de z, la proposée ne pourrait s'intégrer qu'avec le secours d'une équation du second ordre. En effet, on aurait alors

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2, \quad dy = C_1 dz_1 + C_2 dz_2,$$

en faisant

$$z_1 dC_1 + z_2 dC_2 = 0;$$

mais puisqu'on ne pourrait disposer que d'une seule des quantités C_1 et C_2, il faudrait employer le développement complet de d^2y, qui serait

$$d^2y = C_1 d^2z_1 + C_2 d^2z_2 + dz_1 dC_1 + dz_2 dC_2,$$

ce qui donnerait

$$\begin{aligned} d^3y = C_1 d^3z_1 + C_2 d^3z_2 + 2d^2z_1 dC_1 + 2d^2z_2 dC_2 \\ + dz_1 d^2C_1 + dz_2 d^2C_2. \end{aligned}$$

Substituant dans la proposée, et réduisant de la même manière que ci-dessus, on obtiendrait

$$\left.\begin{aligned} dz_1 d^2C_1 + dz_2 d^2C_2 + 2d^2z_1 dC_1 \quad + 2d^2z_2 dC_2 \\ + P dz_1 dC_1 dx + P dz_2 dC_2 dx \end{aligned}\right\} = V dx^3,$$

équation de laquelle on chassera dC_2 et d^2C_2, en tirant leurs valeurs de l'équation $z_1 dC_1 + z_2 dC_2 = 0$, et de sa différentielle; la résultante ne contenant que d^2C_1, dC_1, et des fonctions de x, se ramènera au premier ordre (277).

Enfin, lorsqu'on n'aura qu'une seule valeur de z, on tombera sur une équation auxiliaire du troisième ordre, réductible au second; c'est ce dont il est facile de se convaincre, en mettant dans la proposée,

$$\begin{aligned} C_1 z_1, \quad C_1 dz_1 + z_1 dC_1, \quad C_1 d^2z_1 + 2dz_1 dC_1 + z_1 d^2C_1, \\ C_1 d^3z_1 + 3d^2z_1 dC_1 + 3dz_1 d^2C_1 + z_1 d^3C_1, \end{aligned}$$

au lieu de

$$y,\ dy,\ d^2y \text{ et } d^3y\,;$$

l'équation produite par ces substitutions pourra se réduire à

$$\left.\begin{array}{l} z_1 d^3C_1 + 3dz_1 d^2C_1 \quad + 3d^2z_1 dC_1 \\ \quad + Pz_1 d^2C_1 dx + 2Pdz_1 dC_1 dx \\ \qquad\qquad + Qz_1 dC_1 dx^2 \end{array}\right\} = V dx^3.$$

Si l'on suppose $V=0$, l'équation en y devient la même que celle qui doit donner z, et parconséquent les calculs précédens font voir comment avec deux, ou seulement une valeur particulière de cette fonction, on peut parvenir à son expression générale.

La méthode appliquée ci-dessus à l'équation du premier degré et du troisième ordre, convenant aux équations du meme degré dans tous les ordres, on conclut de ce qui précède, que *si l'on a un nombre* n *de valeurs particulières de* z, *on en déduira immédiatement l'expression générale de cette fonction; et l'on parviendra à la même expression, dans le cas où l'on ne connaîtrait que* n—1 *valeurs particulières, en intégrant une équation du premier degré et du premier ordre:* cette proposition est due à Lagrange, ainsi que la démonstration que je viens d'en donner.

285. L'équation

$$d^nz + Pd^{n-1}z\,dx + Qd^{n-2}z\,dx^2 \ldots + Uz\,dx^n = 0$$

ne peut s'intégrer dans tous les cas; mais on y satisfait en faisant $z=e^{mx}$, lorsque les coefficiens $P, Q, \ldots U$, sont constans, parceque dans cette hypothèse elle devient divisible par $e^{mx}dx^n$, après la substitution des valeurs de z, dz, $d^2z, \ldots\ldots d^nz$, qui sont

$$e^{mx},\quad e^{mx}m\,dx,\quad e^{mx}m^2dx^2 \ldots\ldots e^{mx}m^ndx^n:$$

on trouve alors

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} \ldots\ldots + U = 0.$$

Si on désigne par m_1, $m_2, \ldots \ldots m_n$, les n racines de cette équation, on aura

$$z_1 = e^{m_1 x}, \qquad z_2 = e^{m_2 x}, \ldots z_n = e^{m_n x};$$

et parconséquent

$$z = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} \ldots\ldots + C_n e^{m_n x}.$$

Telle est l'expression générale de z lorsque les racines m_1, $m_2, \ldots$ sont toutes inégales et réelles.

Si, parmi ces racines, il s'en trouve d'imaginaires, comme elles vont toujours par paires, de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

on pourra faire disparaître les $\sqrt{-1}$, en changeant les exponentielles en sinus et en cosinus, par les formules du n° 164; et si m_1 et m_2 sont deux racines imaginaires de la même paire, les termes $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$, qu'elles fournissent à la valeur complète de z, deviendront (281)

$$C_1 e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x} + C_2 e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x}$$
$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)\sqrt{-1}\sin\beta x]$$
$$= e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) = pe^{\alpha x}\sin(\beta x + q).$$

Si quelques-unes des racines m_1, m_2, etc. deviennent égales entr'elles, la valeur complète de z perd de sa généralité, parcequ'alors plusieurs des constantes C_1,

C_2, C_3, etc. se réduisent à une seule, ainsi qu'on l'a vu pour le deuxième ordre (281). Soit d'abord $m_1 = m_2$: les deux termes $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ n'en donneront qu'un, savoir, $(C_1 + C_2) e^{m_1 x}$; l'expression de z ne renfermera plus qu'un nombre $n-1$ de constantes arbitraires; mais si on suppose $m_2 = m_1 + k$, on trouvera

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{kx})$$
$$= e^{m_1 x}\left[C_1 + C_2\left(1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2 x^2}{1.2} + \text{etc.}\right)\right]$$

ce qui, en changeant $C_1 + C_2$ en c_1, et $C_2 k$ en c_2, deviendra

$$e^{m_1 x}\left(c_1 + c_2 x + c_2 \frac{kx^2}{2} + \text{etc.}\right),$$

et $e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x)$, en faisant $k = 0$.

Substituant cette quantité à la place de $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$, la valeur de z reprendra la généralité qu'elle doit avoir pour être l'intégrale complète de l'équation proposée; on aura donc

$$z = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x) + C_3 e^{m_3 x} + \text{etc.}$$

Pour arriver au cas où $m_1 = m_2 = m_3$, on fera dans le résultat précédent $m_3 = m_1 + k'$, et il deviendra.

$$z = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x + C_3 e^{k' x}) + \text{etc.}$$

En développant $e^{k'x}$, on trouvera

$$z = e^{m_1 x}\left[c_1 + C_3 + (c_2 + C_3 k')x + C_3 \frac{k'^2 x^2}{2} + C_3 \frac{k'^3 x^3}{2.3} + \text{etc.}\right] + \text{etc.}$$

changeant les constantes

$$c_1 + C_3,\ c_2 + C_3 k' \text{ et } C_3 \frac{k'^2}{2}, \text{ en } c_1,\ c_2 \text{ et } c_3;$$

il en résultera

$$z=e^{m_1x}\left(c_1+c_2x+c_3x^2+c_3\frac{k'x^3}{3}+\text{etc.}\right)+\text{etc.}$$

et $z=e^{m_1x}(c_1+c_2x+c_3x^2)+\text{etc.}$ lorsque $k'=0$.

On trouvera de la même manière que si

$$m_1=m_2=m_3=m_4,$$

l'expression générale de z sera

$$z=e^{m_1x}(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)+\text{etc.}$$

et ainsi de suite.

286. Si l'on a un nombre m d'équations différentielles du premier degré, renfermant un nombre $m+1$ de variables, une seule de ces variables sera indépendante, et les m autres en seront des fonctions. Quand ces dernières et leurs coefficiens différentiels ne s'éleveront pas au-delà de la première puissance, dans les équations proposées, qui seront alors du premier degré, on pourra, par la méthode indiquée au n° 119, parvenir à une équation différentielle du premier degré entre l'une des fonctions à déterminer et la variable que l'on regarde comme indépendante; mais on peut quelquefois éviter les calculs de l'élimination, en intégrant conjointement les équations proposées.

D'Alembert est le premier qui se soit occupé de l'intégration immédiate de plusieurs équations différentielles, et la méthode qu'il imagina dans cette occasion est trop ingénieuse pour la passer sous silence..

Soient, 1°. les équations

$$\mathrm{d}u+(Au+Bx)\,\mathrm{d}t=T\mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}x+(A'u+B'x)\,\mathrm{d}t=T\mathrm{d}t,$$

où

où l'on regarde les variables u et x comme des fonctions de la variable indépendante t; si on multiplie la seconde par un facteur θ, fonction de t, et qu'on l'ajoute ensuite à la première, il viendra

$$du+\theta dx+[(A+A'\theta)u+(B+B'\theta)x]dt=(T+T'\theta)dt,$$

résultat qui rentrerait dans l'équation du premier degré et du premier ordre, à deux variables seulement, si l'on avait

$$du+\theta dx=d\left(u+\frac{B+B'\theta}{A+A'\theta}x\right),$$

puisqu'en faisant

$$u+\frac{B+B'\theta}{A+A'\theta}x=z,$$

on trouverait

$$dz+(A+A'\theta)zdt=(T+T'\theta)dt.$$

Pour que la condition exigée soit remplie, il faut en général que

$$\theta=\frac{B+B'\theta}{A+A'\theta},\quad d.\frac{B+B'\theta}{A+A'\theta}=0;$$

chassant θ de la seconde équation, on en déduira une relation entre les coefficiens A, B, A', B'.

Lorsque ces coefficiens seront constans, elle sera satisfaite immédiatement, en supposant θ constant; et ce facteur sera déterminé par la première équation, qui ne monte qu'au second degré. Si on désigne par θ_1 et θ_2, les valeurs de θ, qui seront aussi celles de $\frac{B+B'\theta}{A+A'\theta}$; par a_1 et a_2, celles de $A+A'\theta$; enfin, par T_1 et T_2, celles de $\frac{T+T'\theta}{A+A'\theta}$, on trouvera (257) ces deux équations primitives :

$$u + \theta_1 x = e^{-a_1 t}\left(\int e^{a_1 t} T_1 dt + \gamma_1\right),$$
$$u + \theta_2 x = e^{-a_2 t}\left(\int e^{a_2 t} T_2 dt + \gamma_2\right),$$

desquelles on tirera les expressions générales de u et de x, et où γ_1 et γ_2 sont des constantes arbitraires.

Les équations proposées ne paraissent pas d'abord aussi générales qu'elles pourraient l'être, parce que toutes les différentielles n'entrent pas à-la-fois dans chacune; mais si l'on avait les équations suivantes :

$$M du + N dx + (Pu + Qx)\, dt = R dt,$$
$$M' du + N' dx + (P'u + Q'x)\, dt = R' dt,$$

on les ramènerait facilement aux premières, en éliminant alternativement dx et du : on pourrait aussi y appliquer immédiatement le procédé ; mais le calcul est plus simple dans la première forme, laquelle d'ailleurs se rencontre le plus fréquemment dans les applications. J'observerai enfin qu'on aurait pu se procurer une indéterminée de plus, en multipliant la première des équations proposées par un facteur aussi bien que la seconde ; mais cela est inutile pour le cas où les coefficiens du premier membre sont constans, le seul dont il soit à propos de s'occuper ici.

2°. Soient les équations

$$du + (Au + Bx + Cy)\, dt = T dt,$$
$$dx + (A'u + B'x + C'y)\, dt = T' dt,$$
$$dy + (A''u + B''x + C''y)\, dt = T'' dt,$$

dans lesquelles les coefficiens du premier membre désignent des constantes ; on multipliera la deuxième par θ, la troisième par θ'; on les ajoutera ensuite avec la première ; ce qui donnera un résultat, qu'on mettra aisément sous la forme

$$\mathrm{d}u+\theta\mathrm{d}x+\theta'\mathrm{d}y+$$
$$(A+A'\theta+A''\theta')\left\{u+\frac{B+B'\theta+B''\theta'}{A+A'\theta+A''\theta'}x+\frac{C+C'\theta+C''\theta'}{A+A'\theta+A''\theta'}y\right\}\mathrm{d}t$$
$$=(T+T'\theta+T''\theta')\,\mathrm{d}t.$$

Pour qu'il puisse se changer en une équation du premier degré et du premier ordre à deux variables, il faudra que

$$\theta=\frac{B+B'\theta+B''\theta'}{A+A'\theta+A''\theta'},\quad \theta'=\frac{C+C'\theta+C''\theta'}{A+A'\theta+A''\theta'}.$$

Ces dernières équations, qui déterminent θ et θ', conduisent par l'élimination, à une équation finale en θ ou en θ', où l'inconnue, après les réductions convenables, ne monte qu'au troisième degré.

Considérant, en particulier, chacune des racines de cette dernière, on obtiendra trois équations primitives de la forme

$$u+\theta_1x+\theta'_1y=e^{-a_1t}\left(\int e^{a_1t}T_1\mathrm{d}t+\gamma_1\right)$$
$$u+\theta_2x+\theta'_2y=e^{-a_2t}\left(\int e^{a_2t}T_2\mathrm{d}t+\gamma_2\right)$$
$$u+\theta_3x+\theta'_3y=e^{-a_3t}\left(\int e^{a_3t}T_3\mathrm{d}t+\gamma_3\right)!$$

287. D'Alembert applique aux équations du premier degré d'un ordre quelconque, ce procédé, qu'on étend sans peine à un nombre quelconque d'équations du premier degré et du premier ordre; et pour cela il ramène les premières aux secondes. Ayant, par exemple, deux équations de la forme

$$\mathrm{d}^2u+(A\,\mathrm{d}u+B\,\mathrm{d}x)\mathrm{d}t+(Cu+Dx)\mathrm{d}t^2=T\mathrm{d}t^2,$$
$$\mathrm{d}^2x+(A'\mathrm{d}u+B'\mathrm{d}x)\mathrm{d}t+(C'u+D'x)\mathrm{d}t^2=T'\mathrm{d}t^2,$$

il fait $\mathrm{d}u=p\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x=q\mathrm{d}t$; et il a parconséquent entre

les cinq variables p, q, t, u et x, les quatre équations du premier ordre

$$dp + (Ap + Bq + Cu + Dx)\,dt = T\,dt,$$
$$dq + (A'p + B'q + C'u + D'x)\,dt = T'dt,$$
$$du - p\,dt = 0,$$
$$dx - q\,dt = 0,$$

qu'il traite alors par la méthode du n° précédent.

Cet artifice d'analyse s'applique également aux équations du premier degré de tous les ordres, quel que soit leur nombre.

Méthodes pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier et du second ordre.

288. Après avoir épuisé les moyens connus pour intégrer une équation différentielle, il faut chercher à la résoudre par approximation, c'est-à-dire, à en tirer la valeur de y en x, au moyen d'une série. L'idée qui se présente la première pour cela, est de prendre pour y une série à coefficiens indéterminés, ordonnée suivant les puissances de x; mais il faut le plus souvent des artifices particuliers pour déterminer les exposans, lorsqu'ils ne suivent pas la progression des nombres entiers. Quand la forme de cette série est connue, on parvient à trouver ses coefficiens, en la substituant ainsi que sa différentielle, au lieu de y et de dy, dans l'équation proposée.

Si on avait, par exemple, l'équation

$$dy + y\,dx = mx^n dx,$$

on supposerait

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+1} + Cx^{\alpha+2} + \text{etc.}$$

mettant cette valeur, ainsi que celle de dy, qui en résulte, dans $dy + ydx = mx^n dx$, en observant d'assembler les termes de manière qu'on puisse former un nombre suffisant d'équations pour déterminer les exposans et les coefficiens, sans tomber dans des contradictions, on aurait

$$\left.\begin{array}{l} \alpha Ax^{\alpha-1} + (\alpha+1)Bx^{\alpha} + (\alpha+2)Cx^{\alpha+1} + (\alpha+3)Dx^{\alpha+2} + \text{etc.} \\ -mx^n \quad + \qquad Ax^{\alpha} + \qquad Bx^{\alpha+1} + \qquad Cx^{\alpha+2} + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0;$$

équation qui deviendrait identique en faisant $n = \alpha - 1$,

$$\text{ou } \alpha = n+1, \text{ et } A = \frac{m}{\alpha}, B = \frac{-m}{\alpha(\alpha+1)}, C = \frac{m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

$$D = \frac{-m}{\alpha(\alpha+1)\ (\alpha+2)\ (\alpha+3)}, \text{ etc.}$$

et on trouverait

$$y = m\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{etc.}\right]$$

Cette valeur de y est incomplète, puisqu'elle ne renferme point de constante arbitraire, et il en sera de même pour tous les cas où la constante ne peut être isolée de la variable x, dans le développement de l'intégrale; voici comment on pourrait en obtenir une qui eût toute la généralité que comporte une intégrale :

289. Soit $f(x, y, c) = 0$ l'intégrale d'une équation différentielle quelconque; pour en déterminer la constante c, il faudrait connaître la valeur de y qui répond à une certaine valeur de x; savoir, par exemple, que $y = b$,

quand $x=a$: au moyen de cette condition on aurait $f(a, b, c)=0$, d'où on tirerait la valeur de c en a et b. Il est évident qu'on remplira le même but en préparant l'expression de y déduite de l'équation différentielle, de manière qu'en y faisant $x=a$, il en résulte $y=b$; or, c'est ce qui peut s'effectuer en posant $x=a+t$, $y=b+u$, et prenant pour représenter u, une série dont tous les termes s'évanouissent quand $t=0$.

L'équation $dy+ydx=mx^n dx$ devient par cette transformation $du+(b+u)\,dt=m(a+t)^n$, et faisant

$$u=At^\alpha+Bt^{\alpha+1}+Ct^{\alpha+2}+\text{etc.}$$

on trouvera

$$\left.\begin{array}{llll}\alpha At^{\alpha-1}+(\alpha+1)Bt^\alpha+(\alpha+2)Ct^{\alpha+1}+\text{etc.}\\ +b \quad + \quad At^\alpha+ \quad Bt^{\alpha+1}+\text{etc.}\\ -ma^n-m\frac{n}{1}a^{n-1}t-m\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}t^2+\text{etc.}\end{array}\right\}=0;$$

il faudra supposer dans cette équation $\alpha-1=0$, ou $\alpha=1$, et il viendra

$$A=ma^n-b,\ B=\frac{mna^{n-1}-ma^n+b}{2},$$

$$C=\frac{mn(n-1)a^{n-2}-mna^{n-1}+ma^n-b}{2.3},\ \text{etc.}$$

290. La série de Taylor s'applique immédiatement à la même recherche. En regardant b comme une fonction de a, cette quantité deviendra

$$b+\frac{db}{da}\frac{t}{1}+\frac{d^2b}{da^2}\frac{t^2}{1.2}+\frac{d^3b}{da^3}\frac{t^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

lorsque a se changera en $a+t$; et on aura parcon-

séquent

$$y = b + u = b + \frac{db}{da}\frac{t}{1} + \frac{d^2b}{da^2}\frac{t^2}{1.2} + \frac{d^3b}{da^3}\frac{t^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Mais puisque a et b sont deux valeurs correspondantes de x et de y, il doit y avoir entr'elles et le coefficient $\frac{db}{da}$, la même relation qu'entre x, y et $\frac{dy}{dx}$: on trouvera donc la valeur de $\frac{db}{da}$, en mettant a et b à la place de x et de y, dans l'équation proposée ; et les différentielles successives de ce résultat donneront les valeurs de $\frac{d^2b}{da^2}$, $\frac{d^3b}{da^3}$, etc. par un calcul absolument semblable à celui du n° 42.

Cette série sera en général convergente, lorsque t sera très-petit ; et pour s'élever à des valeurs de x plus considérables que $a+t$, il faudra faire $a+t=a_1$, $b+u=b_1$, substituer ces quantités dans l'équation différentielle proposée, afin d'en conclure les coefficiens $\frac{db_1}{da_1}$, $\frac{d^2b_1}{da_1^2}$, etc. au moyen desquels on formera une nouvelle valeur de y, correspondante à a_1+t et exprimée par une série semblable à la précédente. On fera usage de cette dernière, tant qu'elle sera convergente, et on en formera ensuite une autre, comme il vient d'être dit.

Ce procédé cesse d'être applicable quand quelqu'un des coefficiens différentiels devient infini ; mais cela n'arrive que parceque la fonction y est réellement infinie quand $x=a$, ou parcequ'alors la série qui exprime cette fonction doit renfermer des puissances frac-

tionnaires de x. Le premier cas aurait lieu, par exemple, pour l'équation $dy = \frac{dx}{x-a}$, dont l'intégrale est $y = \text{l}(x-a)$; il faut alors prendre la première valeur de x, differente de a. Dans le second cas, il faut déterminer les exposans de la série qui doit représenter y, et lorsqu'on les connait, on peut encore se servir de la série de Taylor. Si, par exemple, la série procédait suivant les puissances de $x^{\frac{m}{n}}$, on ferait $x^{\frac{m}{n}} = z$; on transformerait en conséquence l'équation différentielle proposée, et on développerait après, suivant les puissances de z; au reste, on a dû remarquer que le premier moyen (289) est exempt de cet inconvénient.

291. Ce sont encore les mêmes procédés qu'on applique aux équations du second ordre et des ordres supérieurs. Le plus général est celui dans lequel on prend pour y une série dont les exposans sont indéterminés aussi bien que les coefficiens; l'exemple suivant donnera une idée de la manière dont on obtient la valeur des uns et des autres.

Soit l'équation

$$d^2y + ax^n y dx^2 = 0;$$

si on suppose

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\delta} + Cx^{\alpha+2\delta} + \text{etc.}$$

et que la suite des exposans soit croissante, ou que δ soit positif, on pourra, en supposant x très-petit, concevoir que y se réduise à son premier terme, parceque les suivans sont trop petits pour être compa-

rables à ce premier. Dans cette hypothèse, on pourra se borner à prendre

$$y = Ax^{\alpha}, \quad d^2y = \alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}dx^2,$$

et l'équation proposée deviendra

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} + aAx^{\alpha+n} = 0.$$

Il ne sera pas possible de déterminer α pour que les deux exposans $\alpha-2$ et $\alpha+n$ deviennent égaux, excepté dans le cas particulier où $n=-2$; mais l'exposant de x étant plus considérable dans le second terme que dans le premier, on peut négliger l'un de ces termes vis-à-vis de l'autre, et l'équation se trouvera vérifiée, par approximation, de deux manières, savoir, en prenant $\alpha=0$, et $\alpha=1$, parceque l'une et l'autre hypothèse fait évanouir le terme $\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}$, qui est le plus grand de l'équation : A reste donc indéterminé, et l'on a deux séries, l'une commençant par A, l'autre par Ax.

En prenant successivement

$$y = A + Bx^{\delta} + Cx^{2\delta} + \text{etc.}$$
$$y = Ax + Bx^{1+\delta} + Cx^{1+2\delta} + \text{etc.}$$

et substituant ces valeurs, ainsi que les valeurs correspondantes de d^2y, on reconnaîtra, en ordonnant les termes, que δ doit être égal à 2; et déterminant dans chaque cas les coefficiens A, B, C, etc. on parviendra à ces deux séries :

$$A-\frac{aAx^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)}+\frac{a^2Ax^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}$$
$$-\frac{a^3Ax^{3n+6}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)}+\text{etc.}$$
$$Ax-\frac{aAx^{n+3}}{(n+2)\,(n+3)}+\frac{a^2Ax^{2n+5}}{(n+2)(n+3)\,(2n+4)(2n+5)}$$
$$-\frac{a^3Ax^{3n+7}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)}+\text{etc.}$$

Les développemens rapportés plus haut ne sont que particuliers, puisqu'ils ne contiennent que la constante arbitraire A; mais en écrivant dans le dernier A_1 à la place de A, et prenant ensuite leur somme, on aura, à cause de la forme particulière de l'exemple proposé, (279) une expression générale de y.

Tout ce qui a été dit dans le n° 290, sur les équations du premier ordre, peut s'appliquer à celles du second, avec cette seule différence que le second terme des séries rapportées dans cet article doit être regardé comme arbitraire, puisque l'équation proposée ne donne que le coefficient $\frac{d^2b}{da^2}$ et ceux qui le suivent. Pour déterminer entièrement l'expression de y, il faut donc connaître ce que deviennent cette fonction et son premier coefficient différentiel, lorsque x reçoit une valeur particulière a, ou bien encore avoir deux valeurs particulières de y, correspondantes à deux valeurs données de x; mais ce dernier procédé n'est applicable en général qu'à l'intégrale seconde, exprimée par un nombre fini de termes.

292. Les procédés approximatifs fournis par la série de Taylor, et qui s'étendent à tous les ordres, font voir que les équations différentielles à deux variables sont

toujours possibles, c'est-à-dire qu'on peut toujours assigner des valeurs soit rigoureuses, soit approchées, de la fonction qu'elles déterminent : la même chose se prouve aussi par des considérations géométriques. En effet, quand il s'agit d'une équation du premier ordre, on en tire la valeur du coefficient $\frac{dy}{dx}$ qui exprime la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec la ligne des abscisses, la tangente de la courbe relative à cette équation ; prenant donc le point M, *fig.* 50, correspondant aux coordonnées $AP=a$, $PM=b$, on mènera la ligne MT, faisant avec MQ, parallèle à AB, l'angle $M'MQ$, égal à celui dont la tangente est $\frac{db}{da}$; cette droite tonchera la courbe cherchée, au point M. En regardant la courbe et sa tangente, comme confondues ensemble, dans les environs du point de contact, la droite TM déterminera, pour un point P', infiniment proche de P, l'ordonnée $P'M'$ avec laquelle on calculera, par l'équation différentielle proposée, la tangente de l'angle $M''M'Q$ formé au point M', par la tangente $T'M'$ consécutive à TM. La continuation de ce procédé donnera un polygone qui, à mesure qu'on en multipliera les côtés, différera d'autant moins de la courbe à laquelle appartient l'équation proposée. Il résulte aussi de cette construction, qu'une équation différentielle du premier ordre représente une infinité de courbes, puisqu'on peut prendre le premier point M où on voudra. FIG. 50.

Dans les équations du second ordre, qui ne donnent que le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$, on substitue les paraboles osculatrices aux tangentes. Ayant pris arbitrairement un premier point dont l'abscisse et l'ordonnée soient $x=a$, $y=b$, on formera l'équation

Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

293. Dans le n° 270 il s'est présenté pour une équation différentielle, une *solution particulière* qui ne dérivait pas de l'intégrale complète, et l'on n'est parvenu dans le n° 288, qu'à une valeur de y sans constante arbitraire ; ces deux circonstances font naître les questions suivantes : *d'où viennent les solutions particulières?* et *comment distinguer si une équation primitive qui satisfait à une équation différentielle proposée, dérive ou non de son intégrale?* c'est ce dont je vais m'occuper.

La relation qui existe entre une équation différentielle et son intégrale est telle que cette dernière équivaut à un nombre infini d'équations primitives, qu'on obtiendrait en donnant successivement à la constante arbitraire toutes les valeurs possibles, et dont chacune satisferait à l'équation différentielle (43). On désigne ces diverses équations primitives sous le nom d'*intégrales particulières*, puisque ce sont des cas particuliers de l'intégrale complète. Les *solutions particulières*, dont le nombre est toujours limité, sont des équations primitives essentiellement différentes des intégrales particulières. Ces solutions sont de deux sortes; les unes ne sont autre chose que des facteurs de l'équation différentielle proposée, dans lesquels dx et dy n'entrent point, qui parconséquent étant égalés à zéro donnent des équations primitives, et établissent entre x et y des relations qui rendent la proposée identique. En cherchant les diviseurs communs des fonctions M et N, on trouvera les solutions de cette espèce, dont est susceptible l'équation

$$Mdx + Ndy = o.$$

La seconde espèce de solutions particulières dont l'équation $ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (270) a fourni un exemple, est liée intimement à l'équation différentielle dont elle dérive, quoiqu'elle ne puisse rentrer dans aucun des cas de l'intégrale complète, quelque valeur que l'on donne à la constante arbitraire, ainsi qu'il est facile de le voir, en comparant les équations $y = cx + n\sqrt{1 + c^2}$ et $x^2 + y^2 = n^2$.

Voici la théorie que Lagrange, en 1774, donna de ces dernières solutions, regardées avant lui comme formant un paradoxe dans le Calcul intégral (*).

294. Les solutions particulières, sans être comprises explicitement dans l'intégrale complète, peuvent néanmoins s'en déduire, en cessant de regarder la constante arbitraire comme invariable. En effet, soit $U = 0$, une équation primitive renfermant les variables x, y, et une constante c; l'équation différentielle correspondante, que je désignerai par $V = 0$, sera le résultat de l'élimination de cette constante, entre les équations $U = 0$, $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy = 0$ (43); mais si on suppose que c soit une fonction quelconque de x, on donnera à l'équation $U = 0$ une extension telle qu'elle pourra représenter une équation quelconque à deux

(*) Il les appela *intégrales particulières*, et donna le nom de solutions particulières aux différens cas de l'intégrale complète. Laplace, qui s'est occupé avec succès du même sujet avant Lagrange, emploie ces dénominations dans un sens inverse, et je l'ai suivi. Il m'a semblé que les équations primitives, qui résolvent les équations différentielles sans être comprises dans leur intégrale complète, ne s'obtenant point par les procédés de l'intégration, ne devaient pas porter un nom qui rappelle ces procédés.

variables, et parconséquent aussi toutes les solutions particulières de l'équation $V=0$. Cela posé, en mettant l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$, sous la forme $dy=pdx$, on observera que puisque l'équation $V=0$ résulte de l'élimination de c entre $U=0$ et $dy=pdx$, elle doit demeurer la même quelque valeur qu'on donne à c, et qu'on pourrait parconséquent supposer c variable, pourvu que la loi de sa variation fût telle qu'on eût toujours $dy=pdx$; or, quoiqu'en regardant c comme variable aussi bien que x, il vienne en général $dy=pdx+qdc$, p et q étant des fonctions de x et de c, on aura néanmoins $dy=pdx$ seulement, si $q=0$: déterminant donc c par cette dernière équation, et substituant dans $U=0$ la valeur qu'on trouvera, le résultat satisfera encore à l'équation différentielle $V=0$.

Dans ce qui précède, y a été regardé comme une fonction de x et de c: en considérant à son tour x comme une fonction de y et de c, on mettra l'équation $\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0$, sous la forme $dx=mdy$; et raisonnant comme ci-dessus, on trouvera que, si la valeur de dx, prise en faisant varier c, est $dx=mdy+ndc$, l'équation résultante de l'élimination de c, entre $n=0$ et $U=0$, satisfera aussi à l'équation différentielle $V=0$.

Les équations primitives que donnent l'un et l'autre des procédés que je viens d'exposer, sont nécessairement, ou des solutions particulières de l'équation $V=0$, si elle est susceptible d'en avoir, ou des cas particuliers de son intégrale complète.

On peut comprendre ces deux procédés dans un seul, en faisant évanouir les dénominateurs dans l'é-

quation $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dc}dc = 0$, différentielle de $U = 0$, prise par rapport à x, à y et à c. Elle aura alors la forme

$$Mdx + Ndy + Pdc = 0;$$

on en tirera

$$dy = -\frac{M}{N}dx - \frac{P}{N}dc, \quad dx = -\frac{N}{M}dy - \frac{P}{M}dc,$$

et si les fonctions entières M, N sont algébriques, ou quoique transcendantes, ne peuvent pas devenir infinies par quelque valeur de c, le coefficient de dc ne disparaîtra que par la supposition de $P = 0$, qui donnera ainsi toutes les solutions particulières de $V = 0$.

Lorsque l'équation $P = 0$ ne renferme que c et des constantes, elle donne c constant et ne conduit parconséquent qu'à une intégrale particulière. Quand c ne se trouve qu'au premier degré dans U, il n'entre point dans P, qui ne contient alors que les variables x et y: mais dans ce cas, l'équation $P = 0$ satisfait elle-même à $V = 0$; car $U = 0$ étant de la forme $Q + cP = 0$, $V = 0$ devient $PdQ - QdP = 0$. Pour s'assurer alors si $P = 0$ est une solution particulière, ou seulement une intégrale particulière, on éliminera une des variables x ou y, entre $U = 0$ et $P = 0$; la résultante donnera c variable dans le premier cas, et c constant dans le second. Si on trouvait $c = \frac{0}{0}$, il en faudrait conclure que l'équation $P = 0$, est un facteur de $U = 0$, indépendant de la constante c, et parconséquent étranger à l'équation différentielle $V = 0$.

295. J'appliquerai maintenant cette théorie à l'équation $ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ayant pour intégrale complète

complète $y - cx = n\sqrt{1+c^2}$ (270); en faisant varier c en même temps que x et y, et réduisant tous les termes au même dénominateur, on aura

$$cdx\sqrt{1+c^2} - dy\sqrt{1+c^2} + (x\sqrt{1+c^2} + nc)\,dc = 0;$$

égalant à zéro le coefficient de dc, il vient

$$x\sqrt{1+c^2} + nc = 0,$$

d'où on tire $c = \frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2}}$. Cette valeur change l'équation $y - cx = n\sqrt{1+c^2}$ en $x^2 + y^2 = n^2$ et donne la solution particulière obtenue dans le n° cité.

Toutes les équations de la forme $y = px + P$ (270), dans laquelle se trouve comprise la précédente, ont aussi une solution particulière analogue. Leur intégrale complète, représentée par $y = cx + C$, C étant composé en c, comme P l'est en p, donne

$$cdx - dy + \left(x + \frac{dC}{dc}\right)dc = 0;$$

et posant $x + \frac{dC}{dc} = 0$, on en tire la valeur de c, d'où dépend la solution particulière. Cette solution particulière s'est montrée lorsqu'on a intégré l'équation $y = px + P$; car en la différentiant on est parvenu à une équation composée des deux facteurs

$$x + \frac{dP}{dp} = 0, \text{ et } dp = 0,$$

et le résultat de l'élimination de p entre

$$y = px + P \text{ et } x + \frac{dP}{dp} = 0,$$

serait le même que celui de l'élimination de c, entre

$$y = cx + C, \text{ et } x + \frac{dC}{dc} = 0.$$

Les équations $y = px + P$ ont été remarquées d'abord par Clairaut, tant à cause de la propriété qu'elles ont de s'intégrer facilement, après une nouvelle différentiation, que par rapport à la solution particulière que cette différentiation manifeste sur-le-champ.

Soit encore l'équation

$$xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

dont l'intégrale est

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = y + c, \text{ ou } x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0,$$

en faisant disparaître le radical. On trouve

$$xdx - cdy - (y + c)\,dc = 0,$$

d'où il résulte

$$y + c = 0,$$

et parconséquent

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = 0;$$

la solution particulière est donc dans cet exemple

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

296. Une propriété des solutions particulières qui se présente facilement sur ce dernier exemple, et qui est générale, c'est que l'*equation differentielle peut*

être préparée de sorte que la solution particulière en devienne un facteur. En effet, si on pose

$$\sqrt{x^2+y^2-a^2}=u,$$

on aura

$$xdx+ydy=udu,$$

et l'équation proposée deviendra

$$udu-udy=0.$$

Si on prenait $u=x^2+y^2-a^2$, le radical resterait en évidence dans la transformée, qui deviendrait

$$du-2dy\sqrt{u}=0;$$

en la différentiant on arriverait à

$$d^2u-2d^2y\sqrt{u}-\frac{dydu}{\sqrt{u}}=0;$$

et faisant disparaître le diviseur, il en résulterait

$$d^2u\sqrt{u}-2d^2yu-dydu=0,$$

équation qui serait encore vérifiée par la supposition de $u=0$. Ces transformations pouvant être continuées autant qu'on veut, il s'ensuit qu'il y a des manières de préparer toutes les différentielles de la proposée, pour que la solution particulière y satisfasse aussi, ce qui n'aurait pas lieu sans cela; car si, quand on fait varier la constante c et qu'on pose $\frac{dy}{dc}=0$, on a, pour la solution comme pour l'intégrale complète, $dy=pdx$, la valeur de d^2y, devient par la solution particulière,

$$\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dc}\frac{dc}{dx},$$

tandis qu'elle est seulement $\frac{dp}{dx}$ pour l'intégrale complète ; ce n'est pas non plus au meme facteur que ces deux valeurs satisfont en general : on voit meme que l'équation

$$d^2u\sqrt{u}-2d^2yu-dydu=0,$$

serait vérifiée par la solution particulière, indépendamment des différentielles du second ordre.

Le développement et les démonstrations des circonstances que je viens d'indiquer me mèneraient trop loin ; on les trouvera dans un Mémoire où M. Poisson a éclairci avec succès plusieurs difficultés qui restaient encore sur la théorie des solutions particulieres des divers genres d'équations différentielles. (*Voy. le Journal de l'École Polytechnique*, 13ème *cahier*).

297. Pour reconnaître par ce qui précède si une équation primitive qui ne contient pas de constante arbitraire, et qui satisfait à une équation différentielle donnée, en est une intégrale particulière, ou seulement une solution particulière, il faut en avoir l'intégrale complète ; cette circonstance qui n'a pas toujours lieu, conduit naturellement à la question suivante :

Étant donnée une valeur $y=X$, *qui satisfait à une équation differentielle, determiner si elle est ou non comprise dans l'intégrale complète, et en déduire, s'il est possible, celle-ci.*

En supposant qu'on tire de cette dernière $y=V$, la fonction V sera nécessairement composée avec la

variable x et la constante arbitraire C, de manière à se changer en X, par une détermination convenable de C. Si on désigne par C' cette valeur de C, et qu'on observe que la supposition de $C=C'$ donne $V=X$, ou que la différence $V-X$ s'évanouit quand $C-C'=0$, on en conclura que, du moins par son développement, l'expression de $V-X$ doit pouvoir être mise sous la forme

$$V-X=V'(C-C')^{\mu}+V''(C-C')^{\nu}+\text{etc.}$$

les exposans μ, ν, etc. étant tous positifs, et les quantités V', V'' etc. indépendantes de $C-C'$. On peut prendre $(C-C')^{\mu}=h$; la quantité h demeurera arbitraire aussi bien que la quantité C; et changeant aussi $\frac{\nu}{\mu}$ en μ, il viendra

$$V-X=V'h+V''h^{\mu}+\text{etc.},$$

d'où

$$V=X+V'h+V''h^{\mu}+\text{etc.},$$

expression qu'on pourra regarder comme le développement de la valeur complète de y.

Cela posé, si on représente par $dy=pdx$, l'équation différentielle proposée, résolue par rapport à dy, cette nouvelle équation, à laquelle satisfait par hypothèse l'équation $y=X$, devra être vérifiée indépendamment de h, par la valeur complète de y. En désignant d'abord celle-ci par $X+k$, il faudra pour la substituer dans $dy=pdx$, chercher ce que devient p, lorsqu'on y change y en $X+k$. Soit

$$P+P'k^{m}+P''k^{n}+\text{etc.}$$

le développement de cette valeur de p, les exposans

m, n, etc. que je suppose rangés dans l'ordre de leur grandeur, seront nécessairement positifs; car p ne devient pas infini quand k o, puisque l'équation $y = X$, qui ne donne pas dy infini, rend identique l'équation $dy = pdx$, ensorte que $dX = Pdx$.

Lorsqu'on fait $y = X + k$, on a pour résultat

$$dX + dk = (P + P'k^m + P''k^n + \text{etc.})\,dx,$$

que l'équation $dX = Pdx$ réduit à

$$dk = (P'k^m + P''k^n + \text{etc.})\,dx;$$

et remettant pour k le développement

$$V'h + V''h^\mu + \text{etc.}$$

il vient

$$hdV' + h^\mu dV'' + \text{etc.} = \left\{\begin{array}{l} P'h^m dx\,(V' + V''h^{\mu-1} + \text{etc.})^m \\ + P''h^n dx\,(V' + V''h^{\mu-1} + \text{etc.})^n \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} \;(A)$$

équation d'après laquelle il faut déterminer V', V'', etc. indépendamment de h. En ne prenant d'abord que le terme où cette quantité a le plus petit exposant, on forme l'équation

$$hdV' = P'V'^m h^m dx,$$

qui ne peut avoir lieu, quelle que soit h, que quand $m = 1$; dans ce cas h disparaît et il vient

$$dV' = P'V'dx, \qquad V' = e^{\int P'dx}.$$

Quand $m > 1$, on ne peut plus comparer le premier terme $P'V'^m h^m dx$ du second membre au terme hdV' du premier; mais on fait disparaître ce-

lui-ci en posant $dV'=0$, ce qui donne $V'=const.$, ou plus simplement, $V=1$; puis on suppose $\mu=m$, et on a $dV''=P'dx$, d'où il résulte $V''=\int P'dx$: et en poursuivant de cette manière on trouve les autres termes de la série.

Quand $m<1$, il n'est plus possible de satisfaire à l'équation (A) en aucune manière, puisqu'on ne saurait comparer le terme $P'h^m dx$ ni au terme hdV', ni à aucun de ceux qui le suivent, et dont les exposans surpassent tous l'unité; l'équation $y=X$, ne pouvant alors admettre une constante arbitraire n'est pas une intégrale particulière, mais une solution particulière.

298 Ceci fournit un procédé pour découvrir immédiatement les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre, sans connaître leur intégrale complète. En effet, le développement de p, quand on y change y en $y+k$, serait en général, par le théorême de Taylor,

$$p+\frac{dp}{dy}k+\frac{d^2p}{dy^2}k^2+\text{etc.}$$

et lorsqu'il prend la forme

$$P+P'k^m+\text{etc.}$$

m étant <1, le coefficient différentiel $\frac{dp}{dy}$ devient infini (55); il faut donc que la différentiation par laquelle on passe de p à ce coefficient amène un diviseur qui s'évanouisse. Il résulte de là que si on re-

présente $\frac{dp}{dy}$ par $\frac{K}{L}$, toute solution particulière donnera $L=0$, et sera parconséquent un facteur de L : *et vice versâ ;* tout facteur de L qui ne le sera pas en même temps de K, et qui étant égalé à zéro, vérifiera la différentielle proposée, en sera une solution particulière.

On évite la résolution, par rapport à dy, de l'équation différentielle proposée, en remarquant que si $Z=0$ désigne cette équation, Z étant fonction de x, y, et p, lorsqu'on écrit pdx au lieu de dy, on a

$$\frac{dZ}{dx}dx+\frac{dZ}{dy}dy+\frac{dZ}{dp}dp=0,$$

d'où

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{\frac{dZ}{dy}}{\frac{dZ}{dp}};$$

et que si on a préparé l'équation Z de manière qu'elle ne contienne ni fractions ni radicaux, il suffira pour rendre $\frac{dp}{dy}$ infini, d'égaler à zéro un facteur de $\frac{dZ}{dp}$.

On n'obtiendrait ainsi que les solutions particulières dans lesquelles entre y ainsi que x, mais on parviendrait à celles qui ne renferment que x, et qui sont de la forme $x=const.$, en regardant dans la proposée x comme fonction de y.

299. Je vais chercher par cette méthode, d'abord les solutions particulières de l'équation

$$xdx+ydy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

du n° 295. Cette équation devient, après l'évanouisse-

ment du radical,

$$x^2dx^2 + 2xydxdy + (a^2 - x^2)\,dy^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + 2xyp + (a^2 - x^2)\,p^2 = 0,$$

et la différentiation donne

$$\frac{dZ}{dp} = 2xy + 2p\,(a^2 - x^2):$$

la solution particulière cherchée doit donc être telle, qu'à l'aide de la valeur que sa différentielle fournit pour p, elle vérifie en même temps les deux équations

$$x^2 + 2xyp + (a^2 - x^2)\,p^2 = 0,$$
$$xy + (a^2 - x^2)\,p = 0.$$

Il suit de là que, sans le secours de sa différentielle, elle vérifiera l'équation résultante de l'élimination de p entre les deux précédentes. Cela posé, l'équation

$$xy + (a^2 - x^2)\,p = 0$$

multipliée par p et retranchée de la proposée, conduit à

$$x^2 + xyp = 0, \quad \text{d'où} \quad p = -\frac{x}{y};$$

et substituant cette valeur, de p dans la première, on trouve l'équation

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

qu'on sait être une solution particulière de la proposée.

L'équation plus générale $y = px + P$, étant traitée de la même manière, conduit à $\frac{dZ}{dp} = x + \frac{dP}{dp}$; c'est

donc à l'équation

$$x + \frac{dP}{dp} = 0$$

que doivent satisfaire les solutions particulières; et elles résulteront de l'élimination de p entre celle-ci et l'équation différentielle proposée.

Enfin pour donner un exemple des solutions particulières de la forme $y = const$, je prendrai l'équation

$$\frac{dy}{dx} = b\,(y-a)^m,$$

de laquelle on tire immédiatement

$$\frac{dp}{dy} = mb\,(y-a)^{m-1}.$$

Cette expression ne peut devenir infinie, que quand l'exposant $m - 1$ est négatif, et qu'on a en même temps $y = a$, valeur qui ne satisfait à la proposée que lorsque m est positive; il faut donc d'après cela que l'exposant m soit une fraction positive. Dans ce cas $y = a$ est une solution particulière, tandis que l'intégrale complète est

$$\frac{(y-a)^{1-m}}{1-m} - bx = const.$$

300. En général, parmi les fonctions algébriques, il n'y a que les radicaux qui acquièrent un dénominateur par la différentiation, et qui puissent parconséquent donner $\frac{dp}{dy} = \frac{1}{0}$, lorsque p a une valeur finie; c'est donc dans les radicaux qu'il faut chercher les solutions particulières, en égalant à zéro les fonctions qu'ils affectent, et en s'assurant que les équations résultantes satisfont à la proposée. Par ce procédé, l'équation

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

donne immédiatement $x^2+y^2-a^2=0$; et l'équation

$$y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = n\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2},$$

de laquelle on tire

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-xy}{n^2-x^2} \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2-n^2}}{n^2-x^2}$$

conduit à $x^2+y^2-n^2=0$, comme on l'a déjà trouvé de plusieurs manières.

Résolution de quelques problèmes géométriques, dépendans des équations différentielles.

301. La mise en équation des problèmes géométriques, dépendans des équations différentielles, ne reposant que sur les propriétés des tangentes, des normales, des rayons de courbure, ne présente pas plus de difficultés que les autres traductions analytiques, lorsqu'on connaît les expressions des lignes qu'il faut considérer; aussi n'en donnerai-je que quelques exemples.

J'observerai d'abord que l'intégration des équations différentielles du premier ordre s'appelle aussi *Methode inverse des tangentes*, parceque toute équation différentielle de cet ordre, donnant l'expression de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en x et en y, fait connaître la relation qui existe entre les coordonnées et la soutangente, ou la tangente, ou la normale, etc. dans la courbe qu'elle représente. En effet, si on tire de l'équation proposée $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$, la soutangente aura pour ex-

pression $\frac{y}{p}$, la tangente $\frac{y\sqrt{1+p^2}}{p}$, etc. (65). On découvrit le Calcul différentiel pour mener des tangentes aux courbes, c'est-à-dire, ponr résondre le *Problème direct des tangentes :* on s'occupa ensuite du Calcul intégral, pour parvenir aux équations primitives des courbes par les propriétés de leurs tangentes; mais les progrès et les nombreuses applications de ce Calcul, ont fait abandonner la dénomination de *Méthode inverse des tangentes*, qui ne convenait qu'à un senl de sés usages.

Dans les premiers temps on chercha à déterminer par les aires ou même par les arcs de quelques courbes connues, l'ordonnée de la courbe demandée; depuis on a laissé ces constructions de côté, parceque, quelqu'élégantes qu'elles fussent dans la théorie, elles étaient toujours moins commodes et surtout moins exactes, dans la pratique, que les formules approximatives qui ont pris leur place.

Une équation différentielle ne peut se construire en général que lorsqu'on en a séparé les variables, parcequ'alors l'expression de l'une d'elles ne dépend plus que de la quadrature d'une courbe dont l'équation primitive est connue.

302. Je prends pour exemple la construction des courbes dans lesquelles la soutangente est égale à une fonction donnée de l'abscisse x; l'équation différentielle de cette courbe sera $\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=X$, X désignant la fonction donnée. Les variables se séparent sur-le-champ, dans cette équation, qui n'a que deux termes; et il vient $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{X}$ Multipliant alors les deux membres par une

quantité constante m, on a $\frac{mdy}{y}=\frac{mdx}{X}$; et désignant par Ly le logarithme de y, pris dans le système dont le module est m, l'intégration donne

$$Ly=\int\frac{mdx}{X}=\frac{1}{m}\int\frac{m^2dx}{X}.$$

En construisant d'abord la courbe *DN*, *fig.* 51, telle que FIG. 51.
l'ordonnée correspondante à l'abscisse *AP*, soit $PN=\frac{m^2}{X}$, l'aire *ADNP* donnera la valeur de $\int\frac{m^2dx}{X}$. On réduira cette aire à un rectangle *FQ*, dont l'un des côtés soit m, l'autre côté, *AQ*, exprimera $\frac{1}{m}\int\frac{m^2dx}{X}$; décrivant ensuite la logarithmique *ER*, dont les ordonnées soient perpendiculaires à l'axe *AC*, et élevant par le point *Q* la perpendiculaire *RQ*, on aura $L.RQ=AQ$(101) ou $L.RQ=\frac{1}{m}\int\frac{m^2dx}{X}$: *RQ* sera donc égale à l'ordonnée *PM* de la courbe cherchée (*).

Il faut bien remarquer que cette construction n'exige pas que l'on ait l'expression analytique de la fonction X; on pourrait prendre à sa place l'ordonnée d'une courbe quelconque rapportée à l'axe *AB*, et effectuer sur cette ordonnée et sur la ligne arbitraire m les opérations graphiques indiquées par les formules ci-dessus. On voit aussi que la ligne m n'a été introduite que pour rendre

(*) Je ne me suis pas arrêté à détailler les différens moyens de décrire la logarithmique, qui ne sont tous qu'approximatifs, parcequ'il est plus simple de la construire par points, au moyen des tables de logarithmes. On pourrait employer aussi les espaces asymptotiques de l'hyperbole (225).

ces formules homogènes, et peut etre supposée égale à l'unité.

303. Je vais encore rapporter la solution d'un probleme célèbre dans les premiers temps où l'on s'est occupé du Calcul intégral, du *probleme des trajectoires*. Il a pour objet de *déterminer la courbe qui coupe toutes celles d'une espece donnée, sous un angle donné*. On entend ici par courbes d'une espèce donnée, les diverses courbes particulières qu'on obtient en assignant successivement à l'une des constantes d'une équation primitive toutes les valeurs possibles. Si, par exemple, on fait varier le paramètre d'une parabole, il en résultera une suite de paraboles rapportées au même axe, ayant même sommet, et dont les extrêmes seront d'une part l'axe, et de l'autre la ligne qui lui est perpendiculaire et qui passe par le sommet : la courbe qui coupera toutes celles-ci sous un angle donné en sera la trajectoire (*).

FIG. 52. Soient $D_{,}N_{,}$, DN, $D'N'$, etc. *fig.* 52, les courbes coupées et MZ la courbe coupante, ou la trajectoire cherchée; si par l'un quelconque M de ses points on lui mène une tangente Mt, et qu'on tire aussi celle de la courbe coupée qui passe par ce point, l'angle TMt, d'après l'énoncé de la question, doit être égal à l'angle donné. Je désigne par x', y', les coordonnées des courbes coupées, par x, y, celles de la courbe coupante, et par a la tangente trigonométrique de l'angle constant TMt, qui est égal à la différence des angles MTP, MtP,

---

(*) On donne aussi en Mécanique le nom de *trajectoire*, à la courbe décrite par un corps sollicité par des forces quelconques; mais il ne saurait être question de cette espèce de trajectoire dans un ouvrage consacré uniquement à l'Analyse et à la Géométrie.

dont les tangentes respectives ont pour expression $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{dy}{dx}$ (64); la relation

$$\tang TMt = \tang(MtP - MTP),$$

conduit ensuite à $a = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}}$ (*Trig.* 26).

Je supposerai ici que l'on connaisse l'équation primitive des courbes coupées ; on en tirera par la différentiation $dy' = pdx'$, et l'équation ci-dessus deviendra

$$a\left(1 + p\frac{dy}{dx}\right) + p - \frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots (A).$$

Il faudra écrire partout x et y, au lieu de x' et de y', parcequ'au point M la courbe coupée et la courbe coupante ont les mêmes coordonnées. Cela fait, si on élimine entre l'équation (A) et l'équation primitive des courbes coupées, la constante dont les différentes valeurs particularisent chacune de ces courbes, on aura un résultat qui embrassera toutes leurs intersections successives avec la trajectoire, et en sera parconséquent l'équation.

Soit pour exemple les paraboles ayant même axe et même sommet, et dont l'équation est $y'^n = \alpha x'^m$; il viendra $p = \frac{m\alpha x'^{m-1}}{ny'^{n-1}}$. On pourra chasser immédiatement de cette expression, au moyen de l'équation proposée, le paramètre α qui particularise chaque parabole d'un même degré ; substituant le résultat dans l'équa-

tion (A), après avoir changé x' et y' en x et en y, et divisant ensuite par $x^{m-1}y^{n-1}$, on trouvera

$$a(nx\mathrm{d}x + my\mathrm{d}y) + my\mathrm{d}x - nx\mathrm{d}y = 0.$$

Cette équation étant homogène, peut se traiter par le procédé du n° 255. Lorsqu'on a $m=n=1$, elle devient intégrable en la divisant par x^2+y^2, puisque

$$\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}.\mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2},$$

et que $\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}.\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{x}{y}\right)$ (262) ; on a

donc $$a\mathrm{l}\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{x}{y}\right) = C,$$

ou $$a\mathrm{l}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{y}{x}\right),$$

en changant la constante arbitraire. Si on fait

$$\sqrt{x^2+y^2} = u, \quad \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{y}{x}\right) = t,$$

on retombera sur l'équation des spirales logarithmiques qui ont la propriété de couper leur rayon vecteur sous un angle constant (114) ; et en effet, dans le cas actuel les courbes coupées ne sont autre chose que toutes les lignes droites menées par l'origine des coordonnées, et dont l'équation est $y' = ax'$.

Si on voulait que l'angle TMt fût droit, il faudrait supposer a infini, et parconséquent ne tenir compte que des termes qu'il multiplie ; l'équation ci-dessus se réduirait à $nx\mathrm{d}x + my\mathrm{d}y = 0$, dont l'intégrale $nx^2 + my^2 = c$, montre que la courbe qui coupe à angles droits toutes les paraboles proposées est une ellipse décrite sur le

le même axe que ces courbes, ayant pour centre leur sommet commun. Les trajectoires, pour lesquelles l'angle *TMt* est droit, s'appellent *trajectoires orthogonales;* leur équation générale est $1 + p\frac{dy}{dx} = 0$; et s'obtient en faisant a infini dans l'équation (A).

304. Le problème suivant va montrer comment les considérations géométriques conduisent à la théorie des solutions particulières, que j'ai exposée dans le n° 294. *Trouver une courbe telle que toutes les perpendiculaires abaissées d'un point donné, sur les tangentes de cette courbe, soient égales.* Pour parvenir à l'équation différentielle, il faut se rappeler qu'en nommant x et y les coordonnées d'une courbe, et x' et y' celles de sa tangente, l'équation de cette droite est $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$ (67); prenant pour origine des coordonnées le point connu, duquel doivent être abaissées toutes les perpendiculaires, chacune d'elles aura pour équation $y' = -\frac{dx}{dy}x'$ (*Trig.* 86), et sa longueur sera exprimée par $\sqrt{x'^2 + y'^2}$. En mettant pour x' et pour y' les coordonnées du point où elle rencontre la tangente qui lui correspond, et dont les valeurs s'obtiennent par les deux équations ci-dessus (*Trig.* 87), on aura, en vertu de ces équations

$$x' = \frac{(xdy - ydx)\,dy}{dx^2 + dy^2}, \qquad y' = -\frac{(xdy - ydx)\,dx}{dx^2 + dy^2},$$

et
$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = n;$$

l'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc

$$xdy - ydx = n\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Cela posé, il est facile de voir que le cercle, dont

le rayon $= n$, et dont le centre est l'origine des coordonnées, satisfait à la question. Ce cercle ayant pour équation $y^2 + x^2 = n^2$, est précisément la solution trouvée n° 270; mais toute ligne droite, située, par rapport à l'origine des coordonnées, de manière que sa plus courte distance à ce point, soit égale à n, résout également le problème proposé, et comme il y a une infinité de lignes droites qui peuvent remplir cette condition, c'est dans l'équation qui les comprend toutes que réside l'intégrale complète de l'équation différentielle trouvée ci-desssus, et qui est en effet

$$y - cx = n\sqrt{1 + c^2} \text{ (270).}$$

Une circonstance digne de remarque et qui s'aperçoit sur-le-champ, c'est que toutes les lignes droites dont on vient de parler seront nécessairement touchées par le cercle qui représente la solution particulière, puisqu'il a pour rayon la perpendiculaire abaissée sur chacune d'elles.

La même relation a lieu entre les diverses courbes que représente l'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre, et celle qui résulte d'une solution particulière de cette équation; la dernière touche toutes les autres. En effet, l'équation différentielle ne détermine que la direction de la tangente, et toute courbe qui, dans un point quelconque, aura la même tangente que l'une des courbes déduites de l'intégrale complète, y satisfera nécessairement : or c'est ce qui arrive à la courbe qui touche toutes celles-ci.

Il suit de là que la développée d'une courbe n'est autre chose que la solution particulière de l'équation différentielle qui représente toutes les normales de la développée (95), et qu'en général les courbes don-

nées par les solutions particulières résultent des intersections successives des courbes qui répondent aux diverses valeurs que peut avoir la constante arbitraire dans l'intégrale complète.

La liaison établie dans le n° 294, entre les intégrales complètes et les solutions particulières, se déduit aussi des considérations géométriques; car chaque point du cercle de l'exemple précédent, peut être regardé comme l'intersection de deux tangentes consécutives, c'est-à-dire comme l'intersection de deux droites fournies par deux valeurs consécutives données à la constante c: l'abscisse et l'ordonnée de cette intersection dépendent des valeurs de c, qui parconséquent est à son tour fonction de ces quantités, ou de x et de y. Il est évident que pour former l'équation d'une ligne consécutive à celle que représente l'équation

$$y - cx = n\sqrt{1+c^2},$$

il faut différentier celle-ci en faisant varier c; et comme on ne cherche que l'intersection de ces deux lignes, point où leurs coordonnées sont communes, il faut regarder x et y comme constans : l'intersection cherchée sera donc déterminée par les deux équations

$$y - cx = n\sqrt{1+c^2}$$
$$-x = \frac{nc}{\sqrt{1+c^2}},$$

si on assigne à c une valeur particulière; mais si on élimine c, le résultat ne désignant plus aucune intersection en particulier, embrassera tous les points résultans des rencontres des droites fournies par toutes les valeurs de c, et combinées deux à deux consécutivement, c'est-à-dire le cercle qui est la solution par-

ticulière, et qui se déduit encore ici de la variation attribuée à la constante arbitraire de l'intégrale complète. Les mêmes remarques se vérifient sur les développées, lorsque l'on considère ces courbes comme produites par les intersections des normales consécutives de la développante.

De l'intégration des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

Recherche d'une fonction de plusieurs variables, lorsque tous ses coefficiens différentiels d'un même ordre sont donnés explicitement ou implicitement.

305. Les fonctions qui dépendent de deux ou d'un plus grand nombre de variables, diffèrent de celles d'une seule, en ce qu'elles ont pour chaque ordre plusieurs coefficiens différentiels. Si z, par exemple, est une fonction de deux variables, il aura, pour le premier ordre, deux coefficiens différentiels, savoir: $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$; l'un pris en faisant varier x seul, et l'autre en faisant varier y seul. Dans le second ordre le nombre de coefficiens différentiels s'élève à trois, et s'accroît ainsi successivement d'ordre en ordre (124). Pour remonter des coefficiens différentiels d'une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables, à cette fonction, il se présente plusieurs cas: 1°. on peut avoir tous ses coefficiens différentiels d'un même ordre, exprimés par les variables indépendantes; 2°. la fonction elle-même peut entrer avec les variables indépendantes, dans les expressions des coefficiens différentiels; 3°. enfin, on peut n'avoir qu'une relation entre ces coefficiens, la fonction dont ils dérivent et les variables indépendantes. Je m'occuperai d'abord des deux premiers cas qui sont les plus simples.

306. Lorsque les coefficiens différentiels du premier ordre d'une fonction à deux variables sont connus, on en déduit sa différentielle première, *et vice versâ :* si $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dx}=q$, on aura $dz=pdx+qdy$. Pour obtenir z, il faudra intégrer la différentielle $pdx+qdy$ par le procédé appliqué, n° 261, à la différentielle $Mdx+Ndy$, ce qui ne se pourra, à moins que les fonctions données p et q ne satisfassent à l'équation de condition $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$. Quand cette circonstance n'aura pas lieu, on en conclura que l'expression $pdx+qdy$ n'est la différentielle d'aucune fonction de deux variables, et ne signifie rien du tout, tant qu'on y regarde en même temps les deux variables x et y comme indépendantes.

307. Je m'occuperai encore des fonctions de trois variables.

Soit $dz=ndu+pdx+qdy$, c'est-à-dire que

$$\frac{dz}{du}=n,\quad \frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dy}=q,$$

n, p et q, étant des fonctions de u, x, y. Il existe entre ces fonctions des relations analogues à celles qu'on a fait remarquer plus haut pour la différentielle $dz=pdx+qdy$. En effet, si on suppose successivement dy, dx et du, nuls, c'est-à-dire, si l'on regarde alternativement y, x et u comme constans, la différentielle proposée doit présenter trois différentielles complètes entre deux variables, savoir :

$$dz=ndu+pdx,\quad dz=ndu+qdy,\quad dz=pdx+qdy,$$

desquelles il résultera nécessairement

$$\frac{dn}{dx}=\frac{dp}{du}, \quad \frac{dn}{dy}=\frac{dq}{du}, \quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}.$$

L'intégration s'effectue ensuite en n'ayant d'abord égard qu'à une seule des variables, comme si les deux autres étaient constantes. Soit $\int n du = U + V$, V désignant une fonction dans laquelle u n'entre pas. Si n contient en même temps u, x et y, on aura en différentiant,

$$dz=\frac{dU}{du}du+\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy,$$

ou

$$dz=ndu+\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dx}\right)dx+\left(\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dy}\right)dy,$$

puisque $\frac{dU}{du}du=ndu$; et pour que cette valeur de dz soit identique avec la proposée, il faudra qu'on ait séparément les équations

$$p=\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dx},$$

$$q=\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dy},$$

desquelles on tirera

$$\frac{dV}{dx}=p-\frac{dU}{dx},$$

$$\frac{dV}{dy}=q-\frac{dU}{dy};$$

or $\frac{dU}{dx}$ et $\frac{dU}{dy}$ sont des fonctions connues : on aura

donc V en intégrant, par rapport aux deux variables x et y, la différentielle

$$\left(p-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\left(q-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y,$$

au moyen du procédé du n° 261, procédé qui suppose que l'équation de condition

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$$

soit satisfaite. Cette équation se réduira à

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x},\text{ à cause de }\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}\ (122);$$

de plus, il convient d'observer que V ne devant pas contenir u, on doit avoir

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x\mathrm{d}u}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y\mathrm{d}u}=0;$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x\mathrm{d}u},\qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y\mathrm{d}u};$$

et parconséquent

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x},\qquad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y},$$

puisque

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}}{\mathrm{d}x},\qquad \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}}{\mathrm{d}y}$$

et $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}=n$.

Les équations

$$\frac{dn}{dx}=\frac{dp}{du}, \qquad \frac{dn}{dy}=\frac{dq}{du}, \qquad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},$$

se retrouvant par l'intégration, expriment donc les seules conditions qui doivent être satisfaites pour que l'expression $dz = ndu + pdx + qdy$ soit la différentielle d'une fonction des trois variables u, x et y.

Je ne poursuivrai pas plus loin ce sujet ; ce qui précède suffit pour montrer comment on doit opérer sur une différentielle du premier ordre, renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes; et il est facile d'en déduire le procédé qui conviendrait aux différentielles des ordres supérieurs, dans lesquelles on doit regarder d^2u, d^2x, d^2y, etc. comme de nouvelles variables.

308. Je passe au cas où la fonction cherchée entre dans l'expression de ses coefficiens différentiels, qui, de cette manière, sont tous donnés implicitement. Je suppose, premièrement, que la fonction cherchée z ne dépende que des deux variables x et y; on aura encore $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, p et q contenant en même temps x, y et z: et de là on déduira l'équation différentielle $dz = pdx + qdy$, à laquelle on rapportera l'équation quelconque

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

en faisant $-\frac{P}{R}=p$, $-\frac{Q}{R}=q$.

Pour que p et q soient les coefficiens différentiels d'une fonction de deux variables, il faut toujours que

$\frac{d(p)}{dy} = \frac{d(q)}{dx}$. J'ai employé ici la notation du n° 126, pour marquer qu'il faut faire varier dans p et dans q, en même temps que x et y, la fonction z qui contient implicitement ces variables; en opérant ainsi, et mettant p et q au lieu de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$, on trouvera

$$\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz},$$

ou

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dz} - p\frac{dq}{dz} = 0 \ldots\ldots (A).$$

Si l'on substitue $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$ à la place de p et de q, il viendra, après les réductions,

$$P\frac{dR}{dy} - R\frac{dP}{dy} + R\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dR}{dx} + Q\frac{dP}{dz} - P\frac{dQ}{dz} = 0 \ldots (B),$$

équation qui exprime la relation qui doit exister entre P, Q et R, pour que dans l'équation différentielle

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

z puisse être regardé comme une fonction des deux variables x et y, et que l'intégrale de cette équation soit parconséquent exprimée par une seule équation primitive entre les trois variables x, y et z. Il suit de là qu'une équation différentielle à trois variables, prise au hasard, ne peut pas toujours être vérifiée par une fonction de deux variables indépendantes.

Pendant long-temps on appelait *équations absurdes*, et on regardait comme insignifiantes, celles qui ne satisfaisaient pas à l'équation (B); mais Monge a fait voir

que toutes les équations différentielles à trois variables avaient une signification réelle; et que tandis que celles dont l'intégrale était exprimée par une seule équation entre trois variables appartenaient à des surfaces courbes, chacune des autres représentait une infinité de courbes à double courbure, jouissant d'une propriété commune. Je ne m'occuperai, pour le moment, que des premières; mais dans la suite je reviendrai sur les dernières.

309. Lorsque l'équation (B) devient identique par la substitution des valeurs de P, Q et R, il n'en résulte pas toujours que l'équation

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

soit une différentielle exacte; mais du moins on peut la rendre telle en la multipliant par un facteur. En effet, soit μ ce facteur, et

$$\mu Pdx + \mu Qdy + \mu Rdz$$

une différentielle exacte, on aura (307)

$$\frac{d.\mu R}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dz}, \quad \frac{d.\mu R}{dx} = \frac{d.\mu P}{dz}, \quad \frac{d.\mu Q}{dx} = \frac{d.\mu P}{dy}.$$

Ces équations étant développées deviendront

$$\left.\begin{aligned} &\mu\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + R\frac{d\mu}{dy} - Q\frac{d\mu}{dz} = 0 \\ &\mu\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\frac{d\mu}{dx} - P\frac{d\mu}{dz} = 0 \\ &\mu\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) + Q\frac{d\mu}{dx} - P\frac{d\mu}{dy} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (C);$$

on éliminera μ, en multipliant la première par P, la seconde par $-Q$, la troisième par R, et en ajoutant

les produits; leur somme sera divisible par μ, et donnera

$$P\frac{dR}{dy}-P\frac{dQ}{dz}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}+R\frac{dQ}{dx}-R\frac{dP}{dy}=0,$$

équation qui est la même que (B), et lorsqu'elle sera satisfaite, la détermination de μ ne dépendra que de deux quelconques des trois équations (C).

310. Lorsque les différentielles dx, dy et dz, montent au-delà du premier degré dans l'équation proposée, elle ne peut s'intégrer par ce qui précède, que quand elle satisfait à une nouvelle condition que je vais faire connaître. Soit pour exemple l'équation

$$Pdx^2+Qdy^2+Rdz^2+2Sdxdy+2Tdxdz+2Vdydz=0;$$

elle ne saurait résulter de la différentiation d'une équation primitive entre les variables x, y et z, à moins qu'elle ne puisse se ramener à la forme $P'dx+Q'dy+R'dz=0$. En effet, quelle que soit l'intégrale, on peut toujours en déduire, par la différentiation, $dz=pdx+qdy$, p et q désignant des fonctions quelconques de x, y et z; il faut donc qu'en résolvant la proposée par rapport à dz, les différentielles dx et dy sortent toutes deux du radical; or c'est ce qui n'arrive pas toujours; car on a

$$dz=\frac{1}{R}\{-Tdx-Vdy$$
$$\pm\sqrt{(T^2-PR)dx^2+2(TV-RS)dxdy+(V^2-QR)dy^2}\}:$$

et si la quantité, qui est sous le radical, n'est pas un quarré parfait, ou du moins si l'on n'a pas

$$(TV-RS)^2=(T^2-PR)(V^2-QR),$$

les différentielles dx et dy resteront engagées sous ce radical. En général, quel que soit le degré de l'équation proposée, par rapport à dz, dx, dy, il faut qu'étant ordonnée suivant les puissances de dz, elle puisse se décomposer en facteurs de la forme

$$dz - p dx - q dy = 0.$$

Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.

311. Je vais passer au troisième cas de la recherche des fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables. Dans ce cas, on n'a pour déterminer la fonction inconnue que quelques-uns de ses coefficiens différentiels d'un certain ordre, ou une seule équation entr'eux. Il constitue ce que l'on appelle *le Calcul intégral aux différences partielles*, et qu'on devrait nommer, d'après les remarques du n° 124, *Calcul intégral des différentielles partielles;* car les coefficiens différentiels, considérés isolément, ne font connaître que les différentielles partielles, et non pas les différences qui sont l'objet d'un calcul à part, qu'on trouvera dans le traité des séries qui termine cet ouvrage. Le coefficient $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}$, étant multiplié par $dx^m dy^n$, devient $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n} dx^m dy^n$, et exprime alors la différentielle $m^{ème}$, par rapport à x; de la différentielle $n^{ème}$ de z, par rapport à y, *et vice versâ.*

312. La plus simple des équations différentielles partielles, est celle qui ne renferme que l'un des coefficiens du premier ordre et les variables indépendantes. Soit,

par exemple, $\frac{dz}{dx} = R$, R ne contenant point z; en multipliant par dx, on obtiendra $\frac{dz}{dx}dx = Rdx$, ou $dz = Rdx$, et en intégrant par rapport à x seulement, il viendra

$$z = \int Rdx + C.$$

Dans ce résultat, C n'indique pas une simple constante arbitraire, mais une fonction absolument indéterminée, de toutes les variables autres que x, que pourrait contenir la fonction z. Si, par exemple, z dépendait en même temps de x et de y, on aurait $z = \int Rdx + \varphi(y)$, en désignant par φ une fonction arbitraire composée d'une manière quelconque de la variable y mêlée avec des constantes. Quand z sera une fonction de trois variables u, x et y, on aura alors $z = \int Rdx + \varphi(u, y)$, et $\varphi(u, y)$ représentera une fonction arbitraire dans laquelle les variables u et y pourront être combinées d'une manière quelconque, soit entr'elles, soit avec des constantes. En général pour un nombre quelconque de variables indépendantes s, t, u, x, y, etc. l'intégrale de $\frac{dz}{dx} = R$, sera $z = \int Rdx + \varphi(s, t, u, y, \text{etc.})$, parcequ'il est évident que la fonction $\varphi(s, t, u, y, \text{etc.})$, quelle qu'elle soit, ne variant point quand x varie, on a toujours $\frac{dz}{dx} = R$.

Je viens de supposer que z n'entre pas dans R; s'il s'y trouvait, il faudrait intégrer, par quelques-unes des méthodes précédentes, en ne regardant comme variables que x et z seulement, l'équation

$$\frac{dz}{dx}dx - Rdx = 0 \quad \text{ou} \quad dz - Rdx = 0;$$

et désignant son intégrale par $V = const.$ on aurait

$$V = \varphi\,(s, t, u, y, \text{etc.})$$

pour l'équation primitive de laquelle dépend la fonction z. En effet, si on différentie cette équation en ne faisant varier que x et z, le résultat sera de la forme

$$Pdz + Qdx = 0,$$

et tel que $-\frac{Q}{P} = R$, ce qui donne $\frac{dz}{dx} = R$.

313. L'équation $Pp + Qq = R$, dans laquelle P, Q, R, contiennent à-la-fois x, y et z, est la plus générale qu'il soit possible d'avoit entre les coefficiens du premier ordre p et q, lorsqu'ils ne passent pas le premier degré. En prenant la valeur de p dans cette équation pour la substituer dans

$$dz = pdx + qdy,$$

on trouvera

$$Pdz - Rdx = q\,(Pdy - Qdx),$$

le coefficient q restant toujours indéterminé. Il se présente ici deux cas : 1°. la composition de P, Q et R, peut être telle que la fonction $Pdz - Rdx$ ne renferme que les variables z et x dont elle contient les différentielles, tandis que la fonction $Pdy - Qdx$ ne renferme que x, y ; 2°. l'une ou l'autre de ces fonctions, ou même toutes deux, peuvent renfermer les trois variables x, y et z.

Dans le premier cas, il existe un facteur μ, qui rend $Pdy - Qdx$ différentielle complète, et un facteur μ' qui opère la même chose sur $Pdz - Rdx$; désignant ces différentielles par M et N, on aura

$$Pdy - Qdx = \frac{1}{\mu} dM, \qquad Pdz - Rdx = \frac{1}{\mu'} dN,$$

et l'équation ci-dessus deviendra $dN = \frac{q\mu'}{\mu} dM$. Elle ne peut être intégrable à moins que $\frac{q\mu'}{\mu}$ ne soit une fonction quelconque de M; posant donc $\frac{q\mu'}{\mu} = \varphi'(M)$, on a $dN = \varphi'(M)\, dM$, et en intégrant, il vient $N = \varphi(M)$, résultat dans lequel φ désigne toujours une fonction arbitraire.

Pour donner un exemple de ce cas, je prends l'équation $px + qy = nz$; on en tire

$$P = x, \ Q = y, \ R = nz,$$
$$Pdy - Qdx = xdy - ydx,$$
$$Pdz - Rdx = xdz - nzdx;$$

on trouve par l'intégration des équations

$$xdy - ydx = 0, \quad xdz - nzdx = 0,$$

que les facteurs μ et μ' sont respectivement $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^{n+1}}$; et que parconséquent $M = \frac{y}{x}$, $N = \frac{z}{x^n}$: il s'ensuit donc $\frac{z}{x^n} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ou $z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, c'est-à-dire, que z est une fonction homogène en x et y, du degré n. En effet, l'équation $px + qy = nz$, n'est autre chose que le théorème des fonctions homogènes donné n° 266, et dont ce qui précède fournit encore une démonstration pour le cas de deux variables.

314. Quand les variables x, y et z, sont mêlées indistinctement dans les fonctions $Pdy - Qdx$, $Pdz - Rdx$,

il n'est plus possible de les rendre intégrables, chacune en particulier, par le moyen des facteurs, et cela, parce-qu'on ne sauroit intégrer isolément les équations

$$Pdy - Qdx = o, \quad Pdz - Rdx = o;$$

car il faut bien remarquer que z ne doit pas être supposé constant dans la première, ni x dans la seconde. Lagrange a fait voir le premier que néanmoins si l'on intégrait conjointement ces équations, et qu'on en déduisît deux équations primitives, renfermant chacune une constante arbitraire, de manière qu'on eût $M=a$, $N=b$, M et N étant des fonctions données en x, y et z, l'intégrale de la proposée $Pp+Qq=R$, serait $N=\varphi(M)$, φ désignant toujours une fonction arbitraire. Cette proposition importante paraît démontrée assez simplement de la manière suivante.

Puisque les équations $M=a$, $N=b$, sont supposées déduites des équations $Pdy-Qdx=o$, $Pdz-Rdx=o$, il faut que leurs différentielles aient lieu en même temps que ces dernières, c'est-à-dire que si l'on met dans les équations

$$\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz=o,$$
$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz=o,$$

les valeurs de dy et de dz, tirées de $Pdy-Qdx=o$, $Pdz-Rdx=o$, on parvienne à des résultats identiquement nuls. Ces résultats sont

$$\frac{dM}{dx}P+\frac{dM}{dy}Q+\frac{dM}{dz}R=o,$$
$$\frac{dN}{dx}P+\frac{dN}{dy}Q+\frac{dN}{dz}R=o;$$

on en tire

$\frac{dM}{dx}$

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{dM}{dy}\frac{Q}{P} - \frac{dM}{dz}\frac{R}{P},$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{dN}{dy}\frac{Q}{P} - \frac{dN}{dz}\frac{R}{P};$$

mais l'équation $N=\varphi(M)$ donne $dN=\varphi'(M)dM$, ou, en développant,

$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz=\varphi'(M)\left[\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz\right];$$

substituant dans cette équation les valeurs précédentes de $\frac{dM}{dx}$, $\frac{dN}{dx}$, on trouvera

$$\frac{dN}{dy}(Pdy-Qdx)+\frac{dN}{dz}(Pdz-Rdx)$$

$$=\varphi'(U)\left[\frac{dM}{dy}(Pdy-Qdx)+\frac{dM}{dz}(Pdz-Rdx)\right],$$

d'où l'on déduira

$$Pdz-Rdx=-\frac{\frac{dN}{dy}-\varphi'(M)\frac{dM}{dy}}{\frac{dN}{dz}-\varphi'(M)\frac{dM}{dz}}(Pdy-Qdx),$$

En représentant, pour abréger, par ω la quantité qui multiplie $Pdy-Qdx$ et qui est indéterminée, puisqu'elle contient $\varphi'(M)$, l'équation ci-dessus deviendra

$$Pdz-Rdx=-\omega d(Pdy-Qdx);$$

on en tirera (308),

$$p=\frac{dz}{dx}=\frac{R+\omega Q}{P},\ q=\frac{dz}{dy}=-\omega,$$

valeurs qui satisfont à la proposée, indépendamment de ω, et parconséquent de $\varphi(M)$.

Quand on fait $\varphi(M) = a$, l'intégrale $N = \varphi(M)$ se réduit à $N = b$, ce qui montre que $N = b$ est une intégrale particulière de la proposée. Il en serait de même de $M = a$; car de $N = \varphi(M)$, on tire $M = \varphi_1(N)$; φ_1 étant une fonction inverse de φ, arbitraire parconséquent, et qu'on peut supposer égale à a.

315. On facilite beaucoup, dans un grand nombre de cas, l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, à trois variables, en les partageant en deux autres par l'introduction d'une quantité indéterminée, ainsi qu'on va le voir dans l'exemple suivant :

Soit l'équation $f(p, x) = F(q, y)$; si on fait $f(p, x) = \omega$, on aura en même temps $F(q, y) = \omega$, et on déduira de ces deux équations

$$p = f_{,}(\omega, x), \quad q = F_{,}(\omega, y),$$

$f_{,}$ et $F_{,}$ étant des fonctions inverses de celles que désignent f et F. L'équation $dz = pdx + qdy$ deviendra

$$dz = dx f_{,}(\omega, x) + dy F_{,}(\omega, y);$$

mais si on représente les intégrales

$$\int dx f_{,}(\omega, x), \quad \int dy F_{,}(\omega, y),$$

prises en n'ayant égard qu'aux variables x et y, par P et Q, ces dernières quantités étant aussi des fonctions de ω, il viendra

$$dx f_{,}(\omega, x) = \frac{dP}{dx} dx = dP - \frac{dP}{d\omega} d\omega$$

$$dy F_{,}(\omega, x) = \frac{dQ}{dy} dy = dQ - \frac{dQ}{d\omega} d\omega,$$

et parconséquent

$$dz = dP + dQ - \left(\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega}\right) d\omega.$$

Cette dernière équation ne peut devenir différentielle complète, que par la supposition de

$$\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}=\varphi'(\omega),$$

d'où il suit

$$\int\left(\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega}\right)d\omega=\varphi(\omega):$$

on aura donc

$$z+\varphi(\omega)=P+Q,\quad \varphi'(\omega)=\frac{dP}{d\omega}+\frac{dQ}{d\omega},$$

équations entre lesquelles il faudra éliminer ω, lorsque la fonction arbitraire $\varphi(\omega)$ sera déterminée.

Il suffit souvent de substituer dans l'équation

$$dz=pdx+qdy,$$

la valeur de p ou de q, tirée immédiatement de la proposée, et d'intégrer ensuite le résultat par parties. Lorsqu'on a, par exemple, $p=f(q)$, il vient

$$dz=dxf(q)+qdy:$$

on trouve

$$z=xf(q)+qy-\int(xf'(q)+y)dq;$$

et comme l'intégration indiquée ne peut s'effectuer qu'en prenant $xf'(q)+y=\varphi'(q)$, il en résulte

$$z+\varphi(q)=xf(q)+qy,\quad \varphi'(q)=xf'(q)+y.$$

De l'intégration des équations différentielles partielles des ordres supérieurs au premier.

316. Lorsqu'on passe au second ordre, les coefficiens différentiels de cet ordre sont au nombre de trois

pour une fonction de deux variables, et une équation différentielle partielle du même ordre peut exprimer en général une relation entre les variables indépendantes, la fonction cherchée, et ses coefficiens différentiels, tant du second ordre que du premier.

L'analogie fait voir que l'équation générale d'un ordre quelconque, et d'un nombre quelconque de variables, doit renfermer les variables indépendantes, la fonction cherchée, et ses coefficiens différentiels depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre dont elle est inclusivement. Avant de m'occuper de ce cas général, j'en rapporterai quelques-uns qui s'abaissent à des ordres inférieurs à celui dont ils sont.

1°. Toute équation à trois variables qui sera de la forme

$$\left\{x, y, \frac{d^nz}{dy^n}, \frac{d^{n+1}z}{dxdy^n}, \frac{d^{n+2}z}{dx^2dy^n}, \ldots \frac{d^{n+m}z}{dx^mdy^n}\right\} = 0,$$

quoique de l'ordre $m+n$, se ramène sur-le-champ à une équation de l'ordre m, en faisant $\frac{d^nz}{dy^n} = v$, parce-qu'elle se change en

$$f\left\{x, y, v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \ldots \frac{d^mv}{dx^m}\right\} = 0.$$

On y doit supposer alors y constant, puisque tous les coefficiens différentiels de v qui s'y trouvent sont relatifs à x; et elle peut parconséquent se traiter comme n'étant qu'entre les deux variables x et v; mais il est évident que pour donner à l'expression de v toute la généralité dont elle est susceptible, il sera nécessaire de remplacer les m constantes arbitraires qu'elle doit renfermer, par autant de fonctions arbitraires de la

variable y prise d'abord pour constante. Ayant obtenu v, on remontera à z, par le moyen de l'équation $\frac{d^nz}{dy^n}=v$, dans laquelle on doit maintenant regarder x comme constant, et qui, devenant par là une équation de l'ordre n entre deux variables seulement, pourra se traiter ainsi que les équations de ce genre, en observant néanmoins de changer en fonctions arbitraires de x, les n constantes arbitraires introduites par cette nouvelle intégration.

2°. Les équations de la forme

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}\right)=0,$$

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots \frac{d^nz}{dy^n}\right)=0,$$

peuvent toujours être traitées immédiatement, comme s'il n'y entrait que deux variables, savoir, x et z dans la première, y et z dans la seconde; et après l'intégration, on substituera aux constantes, dans l'une des fonctions de y, et dans l'autre des fonctions de x.

Les équations du second ordre,

$$\frac{d^2z}{dxdy}+P\frac{dz}{dx}=Q, \qquad \frac{d^2z}{dxdy}=P\frac{dz}{dy}=Q,$$

dans lesquelles P et Q ne contiennent que x et y, se rapportent à la première forme. En faisant $\frac{dz}{dx}=v$, la première devient $\frac{dv}{dy}+Pv=Q$, équation du premier degré et du premier ordre, par rapport aux variables v et y, et dont l'intégrale est

$$v=e^{-\int Pdy}\left(\int e^{\int Pdy}Qdy+C\right) \quad (257).$$

Si l'on met pour v sa valeur $\frac{dz}{dx}$, et qu'on change C en $\varphi(x)$, on aura

$$\frac{dz}{dx}=e^{-\int Pdy}\left[\int e^{\int Pdy}Qdy+\varphi(x)\right];$$

en intégrant cette fois, par rapport à z et à y seuls, on trouvera

$$z=\int dx\,e^{-\int Pdy}\left[\int e^{\int Pdy}Qdy+\varphi(x)\right]+\psi(y):$$

en traitant de même la seconde équation, on arriverait à

$$z=\int dy\,e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx}Qdx+\varphi(y)\right]+\psi(x).$$

Lorsqu'on aura $P=0$, les résultats ci-dessus se réduiront à

$$z=\int dx\int Qdy+\int dx\varphi(x)+\psi(y),$$

dans un cas, et dans l'autre à

$$z=\int dy\int Qdx+\int dy\varphi(y)+\psi(x);$$

mais comme la fonction φ est arbitraire, on écrira simplement

$$z=\int dx\int Qdy+\varphi(x)+\psi(y),$$
$$z=\int dy\int Qdx+\varphi(y)+\psi(x).$$

J'observerai que ces derniers cas ne dépendent que de l'intégration des fonctions d'une seule variable, et ont été traités sous ce point de vue, dans le n° 247.

On a des exemples de la seconde forme générale dans les deux équations

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}=Q,\qquad \frac{d^2z}{dy^2}+P\frac{dz}{dy}=Q,$$

lorsqu'on suppose que P et Q renferment x, y et z. La première doit être traitée comme une équation du second ordre, entre les variables x et z; les constantes arbitraires dues à son intégration seront des fonctions de y : on opérera de la même manière sur la deuxième, par rapport aux variables y et z, et on changera les constantes arbitraires en fonctions de x. Pour ne donner que le cas le plus simple, je réduirai les équations proposées à

$$\frac{d^2z}{dx^2} = Q, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = Q,$$

et je supposerai que Q ne contienne que x et y; les formules du n° 220 donneront immédiatement

$$z = \int dx \int Q dx + Cx + C', \quad z = \int dy \int Q dy + Cy + C',$$

d'où on conclura

$$z = \int dx \int Q dx + x\varphi(y) + \psi(y), z = \int dy \int Q dy + y\varphi(x) + \psi(x).$$

317. En passant aux équations du second ordre à trois variables, qui renferment tous les coefficiens différentiels de cet ordre, mais au premier degré seulement, pour simplifier les calculs, je ferai usage des dénominations suivantes :

$$dz = p dx + q dy$$
$$dp = r dx + s dy \qquad dq = s dx + t dy \text{ (*)}$$
$$d^2z = dp dx + dq dy = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2.$$

(*) Le coefficient de dx dans dq est le même que celui de dy dans dp, à cause de la condition $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, à laquelle doit satisfaire la différentielle dz.

L'équation différentielle partielle de cet ordre et à trois variables, considérée dans le cas général, ne peut donner que l'expression de l'un des coefficiens r, s, t, en fonction des deux autres et des quantités p, q, x, y, z; ce qui ne suffit pas pour déterminer les différentielles dp et dq. On peut aussi, au moyen de ces différentielles, éliminer de l'équation proposée, deux des trois coefficiens r, s, t, et le résultat sera la relation que cette équation suppose entre dp et dq; c'est ce procédé que Monge a suivi.

Je l'appliquerai à l'équation

$$Rr + Ss + Tt = V,$$

où je supposerai que les quantités R, S, T et V, renferment, d'une manière quelconque, x, y, z, p et q. En y substituant les valeurs de r et de t, tirées des équations

$$dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy,$$

et qui sont

$$r = \frac{dp - sdy}{dx}, \qquad t = \frac{dq - sdx}{dy};$$

on trouve

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = s(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2),$$

équation dont il semble qu'il faudrait intégrer séparément les deux membres, à cause du coefficient différentiel indéterminé s, qui multiplie le second; mais ici, comme dans le n° 314, il suffit de parvenir à deux équations primitives $M = a$, $N = b$, qui satisfassent en même temps aux équations

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = 0$$
$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0:$$

l'intégrale de la proposée sera encore $N = \varphi(M)$.

Pour le démontrer, je transforme d'abord les équations précédentes en d'autres où les différentielles ne montent qu'au premier degré, et pour cela je fais $dy = mdx$. La seconde de ces équations devenant, après la substitution,

$$Rm^2 - Sm + T = 0 \ldots (A).$$

détermine la quantité m; mettant ensuite pour dy sa valeur dans $Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = 0$, on aura pour chacune des valeurs dont m est susceptible, un système d'équations de la forme

$$\left.\begin{array}{r} dy - mdx = 0 \\ Rmdp + Tdq - Vmdx = 0 \end{array}\right\} (1).$$

auquel il faudra joindre l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

qui exprime la relation qu'ont avec la fonction z, les coefficiens p et q.

Cela posé, si les équations $M = a$, $N = b$ satisfont aux équations (1), et que dans les différentielles

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq = 0,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq = 0,$$

on mette, au lieu de dz sa valeur tirée de........ $dz = pdx + qdy$, et au lieu de dy et de dq, celles que donnent les équations (1), les résultantes

$$\left(\frac{dM}{dx} + m\frac{dM}{dy} + (p+qm)\frac{dM}{dz} + \frac{Vm}{T}\frac{dM}{dq}\right)dx + \left(\frac{dM}{dp} - \frac{Rm}{T}\frac{dM}{dq}\right)dp = 0,$$

$$\left(\frac{dN}{dx} + m\frac{dN}{dy} + (p+qm)\frac{dN}{dz} + \frac{Vm}{T}\frac{dN}{dq}\right)dx + \left(\frac{dN}{dp} - \frac{Rm}{T}\frac{dN}{dq}\right)dp = 0,$$

devront être identiques et se partager parconséquent dans les suivantes :

$$\frac{dM}{dx} + m\frac{dM}{dy} + (p+qm)\frac{dM}{dz} + \frac{Vm}{T}\frac{dM}{dq} = 0,$$

$$\frac{dM}{dp} - \frac{Rm}{T}\frac{dM}{dq} = 0,$$

$$\frac{dN}{dx} + m\frac{dN}{dy} + (p+qm)\frac{dN}{dz} + \frac{Vm}{T}\frac{dN}{dq} = 0,$$

$$\frac{dN}{dp} - \frac{Rm}{T}\frac{dN}{dq} = 0.$$

L'équation $N = \varphi(M)$ étant différentiée, donne

$$dN = \varphi'(M)\,dM,$$

ou

$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\frac{dN}{dp}dp+\frac{dN}{dq}dq=$$
$$\varphi'(M)\left\{\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\frac{dM}{dp}dp+\frac{dM}{dq}dq\right\};$$

si l'on substitue dans cette dernière les valeurs de

$$\frac{dM}{dx},\ \frac{dM}{dp},\ \frac{dN}{dx},\ \frac{dN}{dp},$$

prises dans les quatre précédentes, et qu'on change dz en $pdx+qdy$, on obtiendra

$$\left(\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}\right)(dy-mdx)$$
$$+\frac{1}{T}\frac{dN}{dq}(Rmdp+Tdq-Vmdx)=$$
$$\varphi'(M)\left\{\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)(dy-mdx)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{T}\frac{dM}{dq}(Rmdp+Tdq-Vmdx)\right\},$$

ce qui revient à

$$Rmdp+Tdq-Vmdx=\omega(dy-mdx),$$

en faisant

$$\omega=-\frac{\frac{dN}{dy}+q\frac{dN}{dz}-\varphi'(M)\left(\frac{dM}{dy}+q\frac{dM}{dz}\right)}{\frac{1}{T}\left(\frac{dN}{dq}-\varphi'(M)\frac{dM}{dq}\right)}.$$

Si l'on remet $rdx+sdy$ et $sdx+tdy$, pour dp et dq, et que l'on égale à zéro ce qui multiplie chacune des différentielles indépendantes dx et dy, on obtiendra

$$Rmr+Ts-Vm=-\omega m,\quad Rms+Tt=\omega;$$

puis en tirant de ces équations les valeurs des coefficiens différentiels r et t, pour les substituer dans la proposée, elle deviendra, après les réductions,

$$s(Rm^2-Sm+T)=0;$$

et, en vertu de l'équation (A) elle sera satisfaite indépendamment des quantités ω, et s.

318. Le théorême démontré ci-dessus, ainsi que ses analogues dans les ordres supérieurs, n'a pas la même généralité que celui du n° 314; car il faut bien remarquer que les équations (1) peuvent renfermer à-la-fois les cinq variables x, y, z, p et q, et qu'en y joignant même l'équation $dz=pdx+qdy$, on ne saurait parvenir, par l'élimination, qu'à une résultante contenant trois variables, laquelle parconséquent ne pourrait dériver d'une seule équation primitive, que sous certaines conditions (308). On se tromperait néanmoins si l'on concluait de là que quand les conditions dont on vient de parler ne sont pas remplies, l'équation différentielle partielle proposée ne peut elle-même dériver d'une seule équation primitive.

319. Soit, pour exemple, l'équation

$$Ar+Bs+Ct=V,$$

dans laquelle A, B et C sont constans, et V est une fonction de x et de y. L'équation de (A) devient pour ce cas $Am^2-Bm+C=0$; ses racines, que je désignerai par m' et m'', étant constantes, fournissent deux

systèmes d'équations (1) qui donnent par l'intégration

$$\left.\begin{array}{r} y-m'x=a \\ Am'p+Cq-m'\int V\mathrm{d}x=b \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r} y-m''x=a' \\ Am''p+Cq-m''\int V\mathrm{d}x=b' \end{array}\right\},$$

et où l'intégrale $\int V\mathrm{d}x$ ne dépend que d'une seule variable, parcequ'on peut chasser y de V, au moyen de sa valeur prise dans la première équation de chaque système : on aura donc en même temps ces deux intégrales premières de la proposée,

$$Am'p+Cq-m'\int V\mathrm{d}x=\varphi\,(y-m'x),$$
$$Am''p+Cq-m''\int V\mathrm{d}x=\psi\,(y-m''x);$$

et en intégrant l'une quelconque de ces équations, on arrivera à l'intégrale seconde.

Si on prend la première, par exemple, elle donne

$$p=-\frac{C}{Am'}q+\frac{1}{A}\int V\mathrm{d}x+\varphi\,(y-m'x);$$

on peut, pour simplifier, mettre m'' au lieu de $\frac{C}{Am'}$, puisqu'en vertu de l'équation (A), $m'm''=\frac{C}{A}$; et en substituant dans $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$, on trouvera

$$\mathrm{d}z-\frac{\mathrm{d}x}{A}\int V\mathrm{d}x-\mathrm{d}x\varphi\,(y-m'x)=q\,(\mathrm{d}y-m''\mathrm{d}x):$$

les équations à intégrer (314) seront donc

$$dy - m''dx = 0, \quad dz - \frac{dx}{A}\int V dx - dx\varphi(y - m'x) = 0.$$

On tire de l'une, $y - m''x = a'$, ce qui change l'autre en

$$dz - \frac{dx}{A}\int V dx - dx\varphi\,[a' + (m'' - m')\,x] = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z - \frac{1}{A}\int dx \int V dx - \frac{1}{m'' - m'}\,\varphi\,(a' + (m'' - m')x) = b',$$

et devient

$$z - \frac{1}{A}\int dx \int V dx - \varphi\,(y - m'x) = b,$$

lorsqu'on remet pour a' sa valeur, en observant que φ est une fonction arbitraire, dont les coefficiens différentiels sont arbitraires aussi, et dans laquelle on peut comprendre telle quantité constante qu'on voudra. Il faut aussi remarquer que pour obtenir $\int dx \int V dx$, on doit intégrer une première fois par rapport à x, en substituant au lieu de y sa valeur, tirée de l'équation $y - m'x = a$, comme il a été dit plus haut; mais lorsqu'on sera parvenu au résultat, on remettra au lieu de a sa valeur $y - m'x$, et avant d'effectuer la seconde intégration, on changera y en $a' + m''x$, ainsi que l'exige l'équation $y - m''x = a'$, trouvée en dernier lieu. En général, quand on aura plusieurs de ces intégrations successives à effectuer, on ne pourra jamais employer à leur simplification que les équations qui doivent avoir

lieu en même temps. Avec ces attentions, l'intégrale seconde de l'équation proposée, $Ar+Bs+Ct=V$, sera

$$z-\frac{m}{A}\int dx\int V dx=\varphi(y-m'x)+\psi(y-m''x).$$

Si l'on avait $A=1$, $B=0$, $C=-c^2$, et $V=0$, ce qui changerait l'équation proposée en

$$r-c^2t=0,\quad \text{ou}\quad \frac{d^2z}{dx^2}=c^2\frac{d^2z}{dy^2}\ (*),$$

l'intégrale deviendrait

$$z=\varphi(y-cx)+\psi(y+cx).$$

320. Les fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles, se déterminent, en supposant que la fonction z prenne des formes particulières, lorsqu'on assigne des relations entre les variables y et x. Voici deux exemples de cette détermination :

1°. Si l'on a $1=M\varphi(V)$, M et V désignant des fonctions données en x, y et z, et qu'on veuille déterminer la fonction représentée par la caractéristique φ, de manière qu'en posant $F(x, y, z)=0$, on ait en même temps $f(x, y, z)=0$, les caractéristiques F et f désignant des fonctions connues, on fera $V=t$, et on combinera les trois équations

$$V=t,\quad F(x, y, z)=0,\quad f(x, y, z)=0,$$

pour en tirer des valeurs de x, y et z, en t; sub-

(*) Cette équation est celle des cordes vibrantes.

stituant ces valeurs dans M, qui deviendra une fonction de t, que je désigne par T, on aura

$$1 = T\varphi(t), \quad \text{ou} \quad \varphi(t) = \frac{1}{T},$$

et la fonction φ sera parconséquent déterminée, si l'on remet dans cette dernière équation pour t et T, leur valeur en x, y et z.

2°. Soit $\quad 1 = M\varphi(V) + N\psi(V);$

comme il y a deux fonctions à déterminer, il faut qu'il y ait deux conditions : on doit supposer que

$$F(x, y, z) = 0, \text{ donne } f(x, y, z) = 0,$$

que $F'(x, y, z) = 0$ donne $f'(x, y, z) = 0$.

Faisant toujours $V = t$, et tirant des trois équations

$$V = t, \quad F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

les valeurs de x, y, z en t, on changera les quantités M, N, en fonctions de t. Soient T et θ ces fonctions, on aura

$$1 = T\varphi(t) + \theta\psi(t) \ldots (1);$$

combinant ensuite les équations

$$V = t, \quad F'(x, y, z) = 0, \quad f'(x, y, z) = 0,$$

pour obtenir les valeurs de x, y, z en t, on changera par ces valeurs les quantités M et N en fonctions de t, que je désignerai par T' et θ', et il viendra

$$1 = T'\varphi(t) + \theta'\psi(t) \ldots (2).$$

Au moyen des équations (1) et (2) on déterminera les fonctions

fonctions φ et ψ en t; puis on remettra à la place de t sa valeur V (*).

Des équations différentielles totales qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité.

321. J'ai fait voir dans le n° 308, qu'une équation différentielle du premier ordre à trois variables, de la forme $Pdx+Qdy+Rdz=0$, ne pouvait etre satisfaite par une fonction de deux variables, qu'autant que l'équation

$$P\frac{dR}{dy}-R\frac{dP}{dy}+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}-P\frac{dQ}{dz}=0$$

était identique par elle-même ; mais en établissant une dépendance quelconque entre x, y, z, on changera l'équation proposée, dans une autre qui ne contiendra plus que deux de ces variables, et déterminera parconséquent l'une de celles-ci en fonction de l'autre.

Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{xdx+ydy}{x(x-a)+y(y-b)},$$

qui ne peut remplir la condition énoncée ci-dessus, tant que a et b ne sont pas nuls, et qu'on y fît $y=\varphi(x)$, φ désignant une fonction quelconque, elle se changerait en

(*) La détermination des fonctions arbitraires revient à faire passer par des courbes données, les surfaces qui représentent les équations proposées ; et ces courbes peuvent être continues ou discontinues, ainsi que les fonctions elles-mêmes.

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{[x+\varphi(x)\varphi'(x)]dx}{x(x-a)+\varphi(x)[\varphi(x)-b]},$$

et donnerait autant de relations différentes entre z et x, que l'on assignerait de formes particulières à la fonction φ. Si l'on prend, par exemple, $\varphi(x)=x$, on aura

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{2xdx}{x(x-a)+x(x-b)}=\frac{2dx}{2x-a-b},$$

d'où on tirera $z-c=C(2x-a-b)$, C étant une constante arbitraire; et la proposée sera satisfaite par le système des équations

$$\left.\begin{array}{c} y=x \\ z-c=C(2x-a-b) \end{array}\right\}.$$

Newton, dans son Traité des Fluxions (*), avait déjà indiqué cette manière de résoudre les équations différentielles qui contenaient plus de deux variables; mais elle a l'inconvénient d'exiger une intégration pour chaque résultat qu'on veut obtenir, et Monge a remarqué, en 1784, qu'on pouvait, par l'introduction d'une fonction arbitraire, parvenir à un système général d'équations qui en donnât une infinité de particuliers, satisfaisant tous à la proposée.

322. Le procédé que l'on doit suivre pour intégrer l'équation

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

par une seule équation primitive, lorsque la chose est

(*) *Newtoni opuscula*, tome I, page 83, édition de 1744.

possible, conduit aussi à la solution la plus générale que l'on puisse obtenir pour cette équation, dans le cas contraire. En effet, si on l'intègre d'abord, en regardant une des variables qu'elle renferme comme constante, z, par exemple, que l'on représente par $U=C$, l'équation primitive qui répond à $Pdx+Qdy=o$, que l'on différentie cette équation primitive, en faisant varier à-la-fois x, y, z et C, et que l'on compare le résultat à la proposée, on arrivera à l'équation

$$\frac{dC}{dz}=\frac{dU}{dz}-\mu R,$$

μ étant le facteur qui rend $Pdx+Qdy$ une différentielle complète. A la vérité, le second membre ne se réduira plus à une fonction de z seul, comme cela arrive dans le cas où la condition d'intégrabilité est remplie, et ne pourra donner C, comme l'exige cette condition; mais il est évident qu'en supposant toujours que C soit une fonction de z, l'équation proposée sera satisfaite par l'équation primitive $U=C$, si l'on a en même temps

$$\frac{dC}{dz}=\frac{dU}{dz}-\mu R:$$

faisant donc $C=\varphi(z)$, le système des équations

$$\left.\begin{aligned} U&=\varphi(z)\\ \frac{dU}{dz}-\mu R&=\varphi'(z)\end{aligned}\right\}$$

satisfera à la proposée, quelle que soit la forme de la fonction φ, et pourra se particulariser d'une infinité de manières en prenant φ arbitrairement.

En appliquant ceci à l'équation

Hh 2

$$\frac{dz}{z-c}=\frac{xdx+ydy}{x(x-a)+y(y-b)},$$

que j'ai prise pour exemple dans le n° précédent, on aura

$$Pdx+Qdy=\frac{xdx+ydy}{x(x-a)+y(y-b)},\quad R=-\frac{1}{z-c};$$

et faisant

$$\mu=x(x-a)+y(y-b),$$

on trouvera $U=x^2+y^2$: on obtiendra parconséquent les équations

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=\varphi(z)\\ \frac{x(x-a)+y(y-b)}{z-c}&=\varphi'(z)\end{aligned}\right\}.$$

De la méthode des Variations.

Recherche de la variation d'une fonction quelconque.

323. Toutes les applications du Calcul différentiel, présentées précédemment, supposent que la dépendance des variables demeure constamment la même dans le cours de la question; mais il y a divers genres de problêmes pour lesquels il faut concevoir que cette dépendance change. En voici un exemple : quand V désigne une fonction contenant x, y et les coefficiens différentiels de y, l'intégrale $\int V dx$ est susceptible, entre les mêmes valeurs de x, d'une infinité de valeurs qui dépendent de la relation établie entre x et y; ensorte qu'on peut demander quelle est, parmi toutes les relations possibles, celle qui fait prendre à l'intégrale $\int V dx$, entre les limites données, la plus grande ou la plus petite valeur. L'intégrale $\int V dx$, lorsqu'on

ne particularise pas la relation de y à x, exprimant la mesure d'une propriété commune à toutes les courbes, on demande alors pour quelle courbe cette propriété est un *maximum* ou un *minimum*. Il est visible que si *CE*, *fig.* 54, représente cette courbe, il faudra que pour toute autre $\gamma\varepsilon$, l'intégrale $\int V dx$ ait une valeur plus petite dans le premier cas, et plus grande dans le second. Pour satisfaire à cette condition, la première chose à chercher est la différence qu'un changement quelconque dans la relation de y à x, ou dans la nature de la courbe qui représente cette relation, produit sur l'intégrale $\int V dx$. Ce changement s'exprime en faisant varier y indépendamment de x; car lorsque l'on considère deux courbes *CE* et $\gamma\varepsilon$, la même abscisse *AP* répond à deux ordonnées *PM* et $P\mu$, et leur différence $M\mu$, doit être distinguée des différences $M'R$ et $\mu'\rho$, qui ont lieu entre deux ordonnées consécutives prises sur la même courbe. FIG. 54.

Lagrange, dont les premières recherches ont produit le Calcul des variations, en a fait aussi à la mécanique une application de la plus haute importance, dont on saisira facilement le but, si on observe qu'on peut considérer les coordonnées des différens points d'un corps qui se meut, soit pour comparer au même instant deux points de ce corps, soit pour comparer deux positions consécutives du même point. Dans l'un de ces cas il n'y a entre les coordonnées, de dépendance que celle qui résulte des surfaces qui terminent le corps; dans l'autre, les coordonnées changent suivant les conditions du mouvement établi, et avec une variable nouvelle qui est la mesure du temps : voilà donc encore deux manières de faire varier les mêmes quantités, qu'il est à propos de marquer par des signes distincts. Celle de ces manières qui succède à l'autre,

constitue le *Calcul des Variations*, dont on ne peut embrasser les divers usages qu'en le regardant comme *ayant pour but de différentier sous un nouveau point de vue des quantites qui ont déjà été différentiées sous un autre* : on établit ensuite dans le second mode de différentiation, l'hypothèse convenable à la nature des questions qu'on se propose de résoudre. (Voyez la *Mécanique analytique*, pages 51 et 195).

324. C'est par la caractéristique δ que Lagrange désigne la nouvelle différentiation, et cet usage a été adopté. Pour ne pas sortir des limites de mon sujet, je me bornerai à développer les principes de l'application du calcul des variations aux questions géométriques.

Dans ces questions la caractéristique d s'employe pour le passage d'un point à un autre sur la même courbe, et la caractéristique δ est appliquée au changement de courbe : ainsi MR étant représenté par dy, $M\mu$ sera δy; et il suit de là que

$$P'M' = y + dy, \quad P\mu = y + \delta y.$$

En passant du point M' au point μ', on trouverait, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} P'\mu' &= y + dy + \delta(y + dy) \\ &= y + dy + \delta y + \delta dy; \end{aligned}$$

mais le point μ' étant consécutif au point μ, sur la courbe γ., on aurait aussi

$$\begin{aligned} P'\mu' &= y + \delta y + d(y + \delta y) \\ &= y + \delta y + dy + d\delta y; \end{aligned}$$

et la comparaison de ces deux expressions de la même ligne, donne cette conséquence remarquable :

$$\delta dy = d\delta y.$$

La même chose peut aussi se prouver sans la considération des courbes, en représentant par $\varphi(x)$ l'état primitif de y, et par une autre fonction $\psi(x)$ le résultat de la variation (*). Alors $\delta y = \psi(x) - \varphi(x)$ sera une certaine fonction de x, et parconséquent une fonction de y, à cause de la liaison primitive de ces variables; désignant donc par π cette dernière fonction, on aura

$$\delta y = \pi(y).$$

D'après cette loi, et faisant pour abréger $y + dy = y'$, on aura pareillement

$$\delta y' = \pi(y');$$

d'où on conclura

$$\delta y' - \delta y = \pi(y') - \pi(y) = d.\pi(y) = d\delta y;$$

(*) Afin de donner une origine commune aux fonctions φ et ψ Euler, qui s'empressa d'adopter et d'éclaircir le calcul des variations, regardait la valeur primitive de y, ou $\varphi(x)$, comme déduite d'une autre fonction, contenant, avec la variable x, une nouvelle variable t, et se changeant en $\varphi(x)$ lorsque $t=0$. (*Novi. Comm. Acad. Petrop.* T. XVI, pag. 35). Par ce moyen $y+\delta y$ devient $y + \frac{dy}{dt}dt$, et $\frac{dy}{dt}$ étant pris dans l'hypothèse de $t=0$, représente, tant qu'on ne particularise point la composition de y en t, une fonction arbitraire de x. La valeur générale de y serait exprimée par la série

$$y + \frac{dy}{dt}\frac{t}{1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{t^2}{1.2} + \text{etc.}$$

La variable t étant supposée égale à zéro dans y et ses coefficiens différentiels; et en prenant les coefficiens différentiels de cette série par rapport à x, on formerait toutes les quantités qu'il faut substituer pour obtenir l'état varié de l'intégrale $\int V dx$, ordonné suivant les puissances de t. C'est sous cette forme que Lagrange, dans la nouvelle édition de ses *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, présente celui des variations, à l'égard duquel il entre dans beaucoup de détails très-intéressans.

mais comme

$$dy = y' - y,$$

il viendra, en prenant les variations,

$$\delta dy = \pi(y') - \pi(y),$$

ce qui donne encore

$$\delta dy = d\delta y.$$

Il suit de là que $\delta d^2y = d\delta dy = d^2\delta y$; et continuant ainsi, on obtiendra ce théorême *fondamental*

$$\delta d^n y = d^n \delta y,$$

en vertu duquel *on peut transporter la caractéristique* δ *après la caractéristique* d.

Pour donner plus de symétrie au calcul, ainsi que pour embrasser des circonstances relatives aux limites des intégrales, et dont on verra plus loin quelques exemples, on fait varier x aussi bien que y; mais le théorême ci-dessus ne cesse pas d'avoir lieu pour cela, parceque la loi de la variation étant constante, quoiqu'arbitraire, δx est une fonction de x, de laquelle se tire $\delta x'$, en y changeant x en x' : il en résulte $\delta dx = d\delta x$, et pareillement $\delta dV = d\delta V$, pour toute fonction V dépendante de x.

325. Il existe un théorême analogue par rapport au signe $\int$. En effet, si on représente $\int U$ par U_1, il viendra

$$dU_1 = U, \text{ puis } \delta dU_1 = \delta U;$$

transposant la caractéristique δ après la caractéristique d, et passant ensuite aux intégrales, on trouvera successivement

$$d\delta U_1 = \delta U, \quad \delta U_1 = \int \delta U;$$

puis remettant pour U_1 sa valeur, on aura enfin

$$\delta \int U = \int \delta U.$$

326. Cela posé, on voit que pour obtenir la varia-

tion d'une fonction quelconque U, contenant x, y et leurs différentielles des ordres quelconques, il faut supposer que x et y se changent respectivement en $x+\delta x$, $y+\delta y$, et regarder δx et δy comme des fonctions arbitraires l'une de x, l'autre de y. En se bornant aux termes où les variations ne passent pas le premier degré, l'opération reviendra à différentier par le procédé ordinaire la fonction U, tant par rapport à x et à y, que par rapport à leurs différentielles considérées comme des variables distinctes, mais en marquant par la caractéristique δ la dernière différentiation. Il est visible en effet que, dans cette hypothèse, les différentielles de

$$x,\quad y,\quad \mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y,\quad \text{etc.}$$

sont

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta \mathrm{d}x,\quad \delta \mathrm{d}y,\quad \text{etc.}$$

Si donc la différentielle ordinaire de U est

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U = &M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}^2x + P\mathrm{d}^3x + Q\mathrm{d}^4x + \text{etc.}\\ &+ m\mathrm{d}y + n\,\mathrm{d}^2y + p\,\mathrm{d}^3y + q\,\mathrm{d}^4y + \text{etc.}\end{aligned}$$

il suffira d'y changer le dernier d en δ, et il viendra

$$\begin{aligned}\delta U = &M\delta x + N\delta\mathrm{d}x + P\delta\mathrm{d}^2x + Q\delta\mathrm{d}^3x + \text{etc.}\\ &+ m\,\delta y + n\,\delta\mathrm{d}y + p\,\delta\mathrm{d}^2y + q\,\delta\mathrm{d}^3y + \text{etc.}\end{aligned}$$

Si la fonction U est sous la forme $V\mathrm{d}x$, V ne contenant alors que

$$x,\, y,\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p,\, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = q,\ \text{etc.}$$

on aura

$$\mathrm{d}V = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y + P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + \text{etc.}$$

et la variation sera

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

en observant que les quantités p, q, r, etc. doivent y

être regardées comme renfermant deux variables indépendantes, x et y (n° précéd.) ; et que parconséquent on peut prendre leur variation dans deux hypothèses différentes, savoir : en ne faisant varier qu'une de ces quantités, ou en les faisant varier toutes les deux. J'opérerai ici sous ce dernier point de vue, parceque, comme je l'ai déjà dit, il est plus général, et que d'ailleurs on en tire les résultats qui conviennent au premier, en supprimant les termes relatifs à celle des variables que l'on veut traiter comme constante. En différentiant par la caractéristique δ, les fractions

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{dy}{dx}\\ q&=\frac{dp}{dx}\\ r&=\frac{dq}{dx}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\} \text{ on trouve } \left\{\begin{aligned} \delta p&=\frac{dx\delta dy-dy\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta y-pd\delta x}{dx}\\ \delta q&=\frac{dx\delta dp-dp\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta p-qd\delta x}{dx}\\ \delta r&=\frac{dx\delta dq-dq\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta q-rd\delta x}{dx}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

et à l'aide de ces formules on obtient la variation d'une expression quelconque, renfermant x, y, et leurs différentielles, de quelque ordre que ce soit.

327. Lorsqu'il s'agit d'une formule intégrale $\int U$, dans laquelle U est, comme ci-dessus, une fonction de x, y et de leurs différentielles, on a $\delta\int U=\int\delta U$ (325), et par le n° précédent

$$\begin{aligned}\int\delta U=&\int(M\delta x+N\delta dx+P\delta d^2x+Q\delta d^3x+\text{etc.})\\ &+\int(m\delta y+n\delta dy+p\delta d^2y+q\delta d^3y+\text{etc.})\end{aligned}$$

Cette expression n'est pas réduite à la forme la plus simple qu'elle puisse avoir : il faut faire ensorte qu'il ne reste sous le signe $\int$ aucun terme contenant à-la-

fois les caractéristiques d et δ appliquées l'une sur l'autre ; et c'est à quoi on parvient, en transposant d'abord la caractéristique δ après la caractéristique d, et en intégrant ensuite par parties, comme on le voit ci-dessous,

$$\int M\delta x = \int M\delta x$$
$$\int N\delta dx = \int N d\delta x = N\delta x - \int dN\delta x$$
$$\int P\delta d^2x = \int P d^2\delta x = P d\delta x - \int dP d\delta x = P d^{\delta} x - dP\delta x + \int d^2P\delta x$$
$$\int Q\delta d^3x = \int Q d^3\delta x = Q d^2\delta x - \int dQ d^2\delta x = Q d^2\delta x - dQ d\delta x + \int d^2Q d\delta x$$
$$= Q d^2\delta x - dQ d\delta x + d^2Q\delta x - \int d^3Q\delta x$$

etc. etc.

On aura pareillement

$$\int m\delta y = \int m\delta y$$
$$\int n\delta dy = \int n d\delta y = n\delta y - \int dn\delta y$$
$$\int p\delta d^2y = \int p d^2\delta y = p d\delta y - dp\delta y + \int d^2p\delta y$$
$$\int q\delta d^3y = \int q d^3\delta y = q d^2\delta y - dq d\delta y + d^2q\delta y - \int d^3q\delta y$$

etc.

et en substituant, il viendra

$$\int\delta U = (N - dP + d^2Q - \text{etc.})\delta x + (P - dQ + \text{etc.})d\delta x$$
$$+ (Q - \text{etc.})d^2\delta x + \text{etc.}$$
$$+ (n - dp + d^2q - \text{etc.})\delta y + (p - dq + \text{etc.})d\delta y$$
$$+ (q - \text{etc.})d^2\delta y + \text{etc.}$$
$$+ \int(M - dN + d^4P - d^3Q + \text{etc.})\delta x$$
$$+ \int(m - dn + d^2p - d^3q + \text{etc.})\delta y.$$

Ce résultat est composé de deux parties semblables : l'une produite par la variation de x, et l'autre par celle de y ; et il est aisé de voir qu'on l'étendrait à une fonction d'un nombre quelconque de variables, en y ajoutant pour chacune, des termes pareils à ceux qu'a fournis la variable x ou la variable y.

328. Lorsque l'expression $\int U$ est mise sous la forme $\int V\mathrm{d}x$, c'est-à-dire qu'il n'entre dans V que les variables x, y et les coefficiens différentiels de y, le calcul du développement de la variation paraît un peu plus compliqué, mais il mène à des conséquences assez remarquables. Il faut d'abord observer que

$$\delta\int V\mathrm{d}x = \int\delta(V\mathrm{d}x) = \int V\mathrm{d}\delta x + \int \mathrm{d}x\delta V,$$
$$\int V\mathrm{d}\delta x = V\delta x - \int \mathrm{d}V\delta x,$$

et que parconséquent

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \int(\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x).$$

La quantité $\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x$ se forme en écrivant pour δV et $\mathrm{d}V$, les valeurs rapportées dans le n° 326; et il vient

$$\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x = N(\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\delta x) + P(\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x)$$
$$+ Q(\mathrm{d}x\delta q - \mathrm{d}q\delta x) + \text{etc.}$$

puis mettant $p\mathrm{d}x$ pour $\mathrm{d}y$ dans ce qui multiplie N, et la valeur de δp (326) dans ce qui multiplie P, on trouvera

$$\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\delta x = \mathrm{d}x(\delta y - p\delta x)$$
$$\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x = \mathrm{d}\delta y - p\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}p\delta x = \mathrm{d}(\delta y - p\delta x),$$

d'où il suit

$$\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\right)$$

Si l'on change y en p et p en q, on obtiendra de même

$$\mathrm{d}x\delta q - \mathrm{d}q\delta x = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x}{\mathrm{d}x}\right),$$

et ainsi de suite : faisant donc

$$\delta y - p\delta x = \omega,$$

il en résultera

$$\mathrm{d}x\delta y - \mathrm{d}y\delta x = \omega\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x\delta p - \mathrm{d}p\delta x = \mathrm{d}\omega,$$

$$\mathrm{d}x\delta q - \mathrm{d}q\delta x = \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}, \text{ etc.}$$

et parconséquent

$$\int(\mathrm{d}x\delta V - \mathrm{d}V\delta x) = \int N\omega\mathrm{d}x + \int P\mathrm{d}\omega + \int Q\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}$$

En intégrant par parties, dans le second membre de cette équation, chacun des termes où il y a des différentiations indiquées sur la quantité ω, on aura

$$\int P\mathrm{d}\omega = P\omega - \int\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}.\omega\mathrm{d}x,$$

$$\int Q\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = Q\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} - \int\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\omega$$

$$= Q\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\omega + \int\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}.\omega\mathrm{d}x,$$

etc.

Avec ces expressions, on obtient

$$\delta\int V\mathrm{d}x = V\delta x + \left\{P - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} + \text{etc.}\right\}\omega + \left\{Q - \text{etc.}\right\}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} + \text{etc.} + \int\left\{N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} - \text{etc.}\right\}\omega\mathrm{d}x.$$

On étendrait sans peine ce résultat à un plus grand nombre de variables dépendantes de x, en ajoutant pour chacune des termes pareils à ceux qu'on a trouvés en ne considérant que y ; mais ce qu'il importe d'observer, c'est que si on remet pour ω sa valeur $\delta y - p\delta x$, la partie affectée du signe $\int$ peut alors s'écrire ainsi :

$$\int\left\{N-\frac{dP}{dx}+\frac{1}{dx}d\frac{dQ}{dx}-\text{etc.}\right\}dx\delta y$$

$$-\int\left\{N-\frac{dP}{dx}+\frac{1}{dx}d\frac{dQ}{dx}-\text{etc.}\right\}pdx\delta x,$$

et l'on voit que dans ce cas le coefficient de δy et celui de δx, ont une relation qu'on n'apperçoit point dans le n° précédent ; ensorte que si on égalait à zéro l'un de ces coefficiens, l'autre s'évanouirait aussi.

329. Une remarque non moins digne d'attention, c'est que si dans le développement de $\delta\int U$ (327), on avait

$$M - dN + d^2P - d^3Q + \text{etc.} = 0$$
$$m - dn + d^2p - d^3q + \text{etc.} = 0,$$

la variation $\int\delta U$ serait entièrement délivrée du signe $\int$; mais ces équations sont précisément celles qui doivent avoir lieu pour que la fonction U soit intégrable par elle-même : cela se prouve *à priori*, en appliquant à la recherche de ces conditions la méthode même des variations.

En effet, soit U la différentielle d'une fonction U_1; on aura $U = dU_1$, et parconséquent

$$\delta U = \delta \mathrm{d} U_1 = \mathrm{d} \delta U_1,$$

d'où il suit que si U est une différentielle complète, δU en doit être pareillement une ; et parconséquent lorsqu'on a fait sortir du signe $\int$, dans l'expression de $\int \delta U$, tous les termes qui peuvent s'intégrer, il faut que l'ensemble de ceux qui restent soit nul par lui-même, sans qu'on ait besoin de supposer aucune relation entre x, y, δx et δy.

Le développement de $\delta \int V \mathrm{d}x$, ne fournissant que la seule condition

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} - \text{etc.} = 0,$$

montre que celle qui se rapporte à la variable x, devient inutile quand la fonction U est ramenée à la forme $V\mathrm{d}x$, V ne contenant que x, y et des coefficiens différentiels de y.

330. Ces remarques ne se bornent pas à l'expression de $\int U$: elles s'étendent également à celles de $\int\int U$, $\int\int\int U$, etc. quel que soit le nombre des signes d'intégration ; et en cherchant la variation de ces dernières formules, comme on a fait à l'égard de $\int U$, on trouve les équations de condition, qui doivent avoir lieu pour que la quantité U soit la différentielle complète d'une fonction U_1 d'un ordre immédiatement inférieur, d'une fonction U_2 d'un ordre inférieur de deux unités, etc., et ainsi de suite. Soit

$$\delta U = \left.\begin{array}{l} M\delta x + N\mathrm{d}\delta x + P\mathrm{d}^2\delta x + Q\mathrm{d}^3\delta x + \text{etc.} \\ + m\delta y + n\mathrm{d}\delta y + p\mathrm{d}^2\delta y + q\mathrm{d}^3\delta y + \text{etc.} \end{array}\right\};$$

on aura, par ce qui précède,

$$\delta\int U=(N-dP+d^2Q-\text{etc.})\delta x+(P-dQ+\text{etc.})d\delta x$$
$$+(Q-\text{etc.})d^2\delta x+\text{etc.}$$
$$+(n-dp+d^2q-\text{etc.})\delta y+(p-dq+\text{etc.})d\delta y$$
$$+(q-\text{etc.})d^2\delta y+\text{etc.}$$
$$+\int(M-dN+d^2P-d^3Q+\text{etc.})\delta x$$
$$+\int(m-dn+d^2p-d^3q+\text{etc.})\delta y;$$

mais $\delta\int U=\delta U_1$, et à cause que $U_1=dU_2$, il viendra

$$\delta U_2=\delta\int U_1=\int\delta U_1=\int\delta\int U:$$

on obtiendra donc δU_2 en intégrant de nouveau $\delta\int U$, et en faisant sortir de dessous le premier signe d'intégration, tout ce qu'il sera possible d'intégrer. On trouvera ainsi

$$\delta U_2=\int(N-dP+d^2Q-\text{etc.})\delta x+\int(P-dQ+\text{etc.})d\delta x$$
$$+\int(Q-\text{etc.})d^2\delta x+\text{etc.}$$
$$+\int(n-dp+d^2q-\text{etc.})\delta y+\int(p-dq+\text{etc.})d\delta y$$
$$+\int(q-\text{etc.})d^2\delta y+\text{etc.}$$
$$+\int\int(M-dN+d^2P-d^3Q+\text{etc.})\delta x$$
$$+\int\int(m-dn+d^2p-d^3q+\text{etc.})\delta y;$$

et en intégrant par parties les termes qui contiennent des différentielles de δx ou de δy, on aura

$$\delta U_2=(P-2dQ+3dR-\text{etc.})\delta x+(Q-2dR+\text{etc.})d\delta x$$
$$+(R-\text{etc.})d^2\delta x+\text{etc.}$$
$$+(p-2dq+3dr-\text{etc.})\delta y+(q-2dr+\text{etc.})d\delta y$$
$$+(r-\text{etc.})d^2\delta y+\text{etc.}$$
$$+\int(N-2dP+3d^2Q-4d^3R+\text{etc.})\delta x$$
$$+\int(n-2dp+3d^2q-4d^3r+\text{etc.})\delta y$$
$$+\int\int(M-dN+d^2P-d^3Q+d^4R-\text{etc.})\delta x$$
$$+\int\int(m-dn+d^2p-d^3q+d^4r-\text{etc.})\delta y.$$

Telle

Telle est la variation demandée, qui ne sera délivrée des deux signes $\int$ que quand les équations

$$N - 2dP + 3d^2Q - 4d^3R + \text{etc.} = 0$$
$$n - 2dp + 3d^2q - 4d^3r + \text{etc.} = 0$$
$$M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{etc.} = 0$$
$$m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{etc.} = 0,$$

seront identiques; alors δU_2, étant intégré une seule fois, par rapport aux variations, donnera U_2, ou l'intégrale seconde de la proposée.

Soit pour exemple $U = xd^2y + 2dxdy + yd^2x$;

on a
$$\delta U = d^2y\delta x + 2dyd\delta x + yd^2\delta x + d^2x\delta y + 2dxd\delta y + xd^2\delta y,$$
$$M = d^2y, \quad N = 2dy, \quad P = y,$$
$$m = d^2x, \quad n = 2dx, \quad p = x;$$

et les équations de condition ci-dessus deviendront

$$2dy - 2dy = 0$$
$$2dx - 2dx = 0$$
$$d^2y - 2d^2y + d^2y = 0$$
$$d^2x - 2d^2x + d^2x = 0:$$

la fonction proposée est donc immédiatement intégrable. La partie $y\delta x + x\delta y$, délivrée du signe $\int$, donne, en l'intégrant par rapport aux variations, $U_2 = xy$.

La marche des calculs précédens montre que la première intégration d'une fonction différentielle de m variables, exige m conditions, quand ces variables sont considérées comme indépendantes, et que pour un nombre n d'integrations successives, il y aurait mn équations de condition. Il y en aurait seulement $m-1$ pour la première intégration, et $n(m-1)$ pour toutes ensemble, si la fonction proposée était sous la forme $\int^n V dx^n$, V ne contenant que des coefficiens différentiels.

Des maxima *et des* minima *des formules intégrales indéterminées.*

331. On peut appeller *intégrales indéterminées*, les expressions telles que $\int y dx$, $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$, lorsqu'on n'assigne aucune forme à la fonction y; mais pour être susceptibles de *maximum* ou de *minimum*, ces integrales doivent être *définies* (209), puisque ce n'est qu'entre des limites données qu'elles auront une valeur fixe, quand y sera déterminé en x.

Les principes exposés dans le n° 134, à l'égard des fonctions dont la forme est donnée, s'appliquent aussi, avec le secours du calcul des variations, aux intégrales indéterminées. En effet, d'après la marche tracée dans le n° 121, le résultat de la substitution de

$$x+\delta x,\quad y+\delta y,\quad dx+\delta dx,\quad dy+\delta dy, \text{ etc.}$$

à la place des quantités x, y, dx, dy, etc.
dans une fonction quelconque u de ces quantités, pourra s'ordonner suivant les puissances des variations,

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta dx,\quad \delta dy,\quad \text{etc.};$$

et δu contiendra tous les termes de ce développement, dans lesquels les variations ne montent qu'au premier degré. Ces termes, changeant de signe en même temps que les variations, doivent, suivant la théorie rappelée ci-dessus, s'anéantir lors du *maximum* et du *minimum*, quelles que soient les variations δx et δy; il faut donc que $\delta u=0$. Lorsque $u=\int U$, il vient $\delta u=\int\delta U$ (325); au *maximum* et au *minimum* de $\int U$, on a donc $\int\delta U=0$, en observant que c'est entre les limites assignées à $\int U$, que $\int\delta U$ doit s'évanouir.

Il résulte aussi de la même théorie que la condition

$\delta u = 0$, n'entraîne pas nécessairement l'existence du *maximum* ou du *minimum*, parcequ'il faut en outre que les termes où les variations s'éleveraient au second degré, conservent toujours le même signe ; la discussion de ces dernières conditions est trop compliquée et trop délicate pour trouver place ici.

332. Le développement de $\int \delta U$ est composé de deux parties bien distinctes (327), puisque l'une est délivrée du signe $\int$, et l'autre y demeure soumise; on peut représenter la première par

$$\alpha \delta x + \beta \delta y + \alpha_1 d\delta x + \beta_1 d\delta y + \text{etc.}$$

et la seconde par $\int \{ \chi \delta x + \psi \delta y \}$.

Ces parties ne sauraient être comparées entr'elles, puisque la dernière n'est point intégrable, tant que δx et δy conservent l'indépendance qu'exige la nature du problème; et dans cet état on ne peut la faire évanouir qu'en posant séparément les équations

$$\chi = 0, \quad \psi = 0,$$

dont le nombre est généralement égal à celui des variations indépendantes; mais lorsqu'il n'y a que deux variables, et que U peut prendre la forme $V dx$, le développement de la variation de $\int V dx$, dans le n° 328, fait voir que $\chi = -\psi p$, et que parconséquent $\chi dx + \psi dy = 0$, condition d'ailleurs facile à vérifier en particulier sur chaque exemple. Il s'ensuit que les équations $\chi = 0$ et $\psi = 0$ rentrent l'une dans l'autre, et qu'il n'y a, entre y et x, qu'une seule relation qu'on aurait également obtenue en posant $\delta x = 0$, c'est-à-dire en ne faisant point varier x ; mais cette hypothèse restreindrait beaucoup, comme on va le voir, les propriétés de la partie délivrée du signe $\int$, dans la variation.

Il suit de ce qui précède, que les équations indiquées dans le n° 329, comme exprimant les conditions qui rendent intégrables les formules $\int U$ et $\int V dx$, et qui sont alors identiques, quand elles cessent de l'être, déterminent la relation de y à x, par laquelle les intégrales proposées deviennent un *maximum* ou un *minimum*. On reconnaît aisément que ces équations peuvent s'élever jusqu'à l'ordre dont l'exposant est double de celui de la plus haute différentielle contenue, soit dans U, soit dans V.

333. Par l'évanouissement de la partie affectée du signe $\int$, il vient

$$\int\delta U = \alpha\delta x + \beta\delta y + \alpha_1 d\delta x + \beta_1 d\delta y + \text{etc.}$$

et faisant, pour abréger, $\int\delta U = \varphi$, la valeur complète de cette intégrale s'obtiendra en prenant la différence de celles que reçoit la quantité φ, à chacune des deux limites (209); ensorte que si φ' représente cette valeur pour la première limite, et φ'' pour la dernière, on aura $\int\delta U = \varphi'' - \varphi'$, d'où il résultera encore, pour le *maximum* et le *minimum* de l'intégrale $\int U$, la condition

$$\varphi'' - \varphi' = 0;$$

mais il faut bien remarquer que cette équation ne contient plus que des quantités qui se rapportent aux limites de l'intégrale $\int U$, et qu'alors les variations δx, δy, δdx, δdy, etc. peuvent être nulles, ou seulement liées entr'elles par des relations données, selon que ces limites seront fixes ou variables. L'application géométrique de ces diverses circonstances, les éclaircira suffisamment.

La première a lieu lorsque la courbe qui rend *maximum* ou *minimum*, l'intégrale proposée, doit être prise entre toutes les courbes assujéties à passer

par deux points dont les coordonnées sont déterminées, ainsi que tout ce qui s'y rapporte, et que l'intégrale doit commencer à l'un de ces points, et finir à l'autre. Si x' et y' désignent les coordonnées du premier, x'' et y'' celles du second, ces quantités, appartenant à toutes les courbes qu'on pourra considérer dans la question dont il s'agit, n'éprouveront aucune variation : quand donc on changera x et y en x' et en y', puis en x'' et en y'', il faudra faire

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0.$$

Alors les termes affectés de ces variations disparaîtront d'eux-mêmes de l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$, qui sera parconséquent vérifiée si elle ne contient que ces termes ; et la courbe déduite de l'équation $\chi = 0$, résoudra complètement le problème, pourvu qu'on l'assujétisse à passer par les deux points donnés ; ce qui s'effectuera en général, par la détermination des constantes arbitraires comprises dans l'intégrale de l'équation citée, qui sera alors du second ordre.

Si l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$ contenait de plus les termes affectés de $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$, $\delta dy''$, et qu'outre la condition précédente, les tangentes de la courbe cherchée dussent avoir, aux limites de l'intégrale, une inclinaison donnée, ces termes disparaîtraient aussi d'eux-mêmes, parceque les différentielles dx et dy n'éprouvant aucun changement aux limites, les variations $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$, $\delta dy''$, seraient zéro, et feraient évanouir les produits où elles entrent : mais pour assujétir la courbe cherchée à cette condition, par rapport aux tangentes de ses points extrêmes, il faudrait que son équation contînt deux constantes arbitraires de plus que dans le cas précédemment examiné, et que parconséquent l'équation différentielle $\chi = 0$ fût du quatrième ordre. En voilà

assez pour montrer comment doit se vérifier l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$, lorsque les coordonnées des limites et leurs coefficiens différentiels ont des valeurs fixes : je passe aux cas où les limites doivent être regardées comme variables.

334. On peut demander que la courbe douée du *maximum* ou du *minimum* de la propriété proposée, soit prise, non parmi toutes les courbes qui passent par deux points donnés, mais parmi toutes celles qui seraient menées entre deux courbes données AA' et
FIG. 55. BB', *fig.* 55, sans déterminer les points où ces dernières sont coupées par celle qu'on cherche. Il est visible qu'en passant alors de la courbe AB, à une autre $A'B'$, les extrémités A et B se meuvent; les abscisses qui répondent au commencement et à la fin de l'intégrale, après qu'elle a varié, ne sont plus celles qui convenaient à son état primitif, et les ordonnées qui s'y rapportent ont changé suivant la loi établie par les courbes AA' et BB'. Dans cette circonstance, les variations des ordonnées et celles de leurs abscisses doivent avoir les mêmes relations que les différentielles relatives aux courbes AA', BB', relations exprimées par les équations de ces courbes, qui sont données : il est donc nécessaire de les introduire dans l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$; et pour la vérifier ensuite, il faudra égaler séparément à zéro, les coefficiens des variations qui resteront indépendantes.

A mesure que la fonction $\int U$ contiendra des différentielles d'un ordre plus élevé, le nombre de termes de l'équation $\varphi'' - \varphi' = 0$, augmentant, on pourra ajouter de nouvelles conditions aux limites; supposer, par exemple, que la courbe AB doit être prise parmi toutes celles qui touchent à-la-fois les deux courbes AA' et BB'. Par cette dernière condition, non-seu-

lement les coordonnées x et y doivent avoir, aux limites de l'intégrale, les relations exprimées par les équations de ces courbes ; mais il en doit être de même de leurs différentielles ; ainsi les variations $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$, $\delta dy''$, ne sont plus indépendantes, et doivent coïncider avec les differentielles secondes relatives aux courbes proposées. On pourra, par ces relations, éliminer quelques-unes des variations $\delta dx'$, $\delta dy'$, $\delta dx''$, $\delta dy''$, de l'équation $\varphi''-\varphi'=0$; et ensuite on la vérifiera en égalant séparément à zéro, les coefficiens des variations restantes, qui seront entièrement arbitraires.

Les équations qu'on se procurera par ce moyen, établissant des relations entre les coordonnées des points extrêmes de la courbe proposée, porteront nécessairement sur les constantes introduites par l'intégration de l'équation $\chi=0$, et serviront à les déterminer.

335. Les applications éclairciront ce qui précède; mais on doit déjà remarquer que, puisqu'il y a des circonstances où il faut avoir égard aux variations des limites des intégrales, si les coordonnées x', y', x'', y'', de ces limites, entraient dans l'expression de U, il serait nécessaire de les y faire varier, aussi bien que x et y, et d'augmenter parconséquent δU des termes

$$A'\delta x' + B'\delta y' + A''\delta x'' + B''\delta y''$$
$$+ A'_1 d\delta x' + B'_1 d\delta y' + A''_1 d\delta x'' + B''_1 d\delta y'' + \text{etc.}$$

et comme les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$, sont indépendantes des coordonnées indéterminées x et y; elles passeraient hors du signe $\int$, tandis que les fonctions A', A'', etc., A'_1, A''_1, etc. y resteraient soumises: il faudrait donc introduire dans la première partie de la variation δU, les termes

$$\delta x'\int A' + \delta y'\int B' + \delta x''\int A'' + \delta y''\int B''$$
$$+ d\delta x'\int A'_1 + d\delta y'\int B'_1 + d\delta x''\int A''_1 + d\delta y''\int B''_1 + \text{etc.}$$

en ayant soin de prendre ces intégrales entre les mêmes limites que la proposée.

On ne voit pas tout de suite ce que deviendraient les termes précédens, si l'une des limites était en même temps l'origine des coordonnées. On évite cette difficulté, en faisant d'abord

$$x = X - x', \quad y = Y - y',$$

et en concevant que l'origine des coordonnées X, Y, soit fixe, mais que les quantités x' et y' soient variables; il vient alors

$$\delta x = \delta X - \delta x', \quad \delta y = \delta Y - \delta y'.$$

Quant aux différentielles $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, etc., elles ne dépendent point des quantités x' et y', et ne prennent parconséquent aucune variation; l'expression de δU, devient donc seulement

$$M(\delta X - \delta x') + N\delta \mathrm{d}X + \text{etc.}$$
$$+ m(\delta Y - \delta y') + n\delta \mathrm{d}Y + \text{etc.}$$

Il est permis de faire ensuite x', y', égaux à zéro, pourvu qu'on laisse subsister les variations $\delta x'$, $\delta y'$, qui peuvent être considérées comme le premier degré de grandeur de ces quantités; alors X et Y redeviennent x et y, et le changement de l'expression de $\int\delta U$ se réduit aux termes $-\delta x'\int M - \delta y'\int m$, dont il faut prendre les intégrales dans les limites primitives.

336. Soit proposé de déterminer y en x, pour que l'intégrale $\int\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$, prise entre deux limites données, soit un *minimum*, ce qui revient à *trouver la plus courte ligne qu'on puisse mener entre deux points, sur un plan*. On a

$$\delta U = \delta\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}x\delta\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\delta\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}},$$

et

$$\int\delta U = \int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}\delta x + \int\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}\delta y,$$

en faisant $\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$, et en transposant la caractéristique δ. Intégrant ensuite par parties, on trouve

$$\int \delta U = \frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y - \int \left(d\frac{dx}{ds}\delta x + d\frac{dy}{ds}\delta y \right);$$

et la partie affectée du signe $\int$ donne (332)

$$d\frac{dx}{ds}=o, \text{ d'où } \frac{dx}{ds}=C, \ \frac{dy}{dx}=C', y=C'x+C''.$$

Ce résultat, ainsi qu'on devait s'y attendre, désigne la ligne droite; et les constantes qu'il renferme serviront à remplir les conditions relatives aux points entre lesquels elle doit être menée.

La partie qui est délivrée du signe $\int$, ou φ(333), ne contenant que les variations des coordonnées des points extrêmes, s'évanouit quand ils sont fixes; et les constantes C' et C'', se déterminent alors en assujétissant la droite proposée à passer par ces points. Quand ils ne sont pas fixes, mais qu'ils doivent seulement se trouver sur des courbes données, il faut que les quantités x' et y', x'' et y'', qui sont inconnues, satisfassent, ainsi que leurs variations, à l'équation $\varphi''-\varphi'=o$ qui devient

$$\frac{dx''}{ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{ds''}\delta y'' - \frac{dx'}{ds'}\delta x' - \frac{dy'}{ds'}\delta y' = o,$$

et aux équations des courbes données, dont je représenterai les différentielles par

$$dy = m dx, \quad dy = n dx;$$

on aura donc (334),

$$\delta y' = m'\delta x', \quad \delta y'' = n''\delta x'',$$

$$\left(\frac{dx''}{ds''} + n''\frac{dy''}{ds''}\right)\delta x'' - \left(\frac{dx'}{ds'} + m'\frac{dy'}{ds'}\right)\delta x' = o.$$

A cause de l'indépendance des variations $\delta x''$ et $\delta x'$,

cette équation se partage dans les suivantes :

$$dx'' + n''dy'' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy''}{dx''} = -\frac{1}{n''},$$

$$dx' + m'dy' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{m'},$$

qui expriment que la droite proposée doit rencontrer à angle droit, chacune des courbes données.

D'après l'équation $y = C'x + C''$, on a $dy = C'dx$ pour tous les points de la droite, et les équations précédentes deviennent en conséquence

$$1 + C'n'' = 0, \quad 1 + C'm' = 0;$$

mais la constante C' dépend des coordonnées des points extrêmes, puisque l'équation de la droite menée par ces points étant

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'), \text{ donne } C' = \frac{y' - y''}{x' - x''};$$

et substituant cette valeur de C', il en résulte les équations

$$x' - x'' + n''(y' - y'') = 0, \quad x' - x'' + m'(y' - y'') = 0,$$

dont la combinaison avec celles des courbes données, détermine les points par où passe la plus courte distance de ces courbes, et complète la solution du problème proposé.

On arriverait aux mêmes équations, en supposant d'abord que les points extrêmes soient fixes, circonstance dans laquelle on a, entre y et x, l'équation

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

En effet, par cette relation, l'intégrale $\int\sqrt{dx^2 + dy^2}$ devient, entre les abscisses x' et x'',

$$(x' - x'')\sqrt{1 + \left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right)^2} = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2};$$

et la seule application du Calcul différentiel suffit pour déterminer le *minimum* de cette expression, en ayant égard à la dépendance qu'établissent entre x' et y', x'' et y'', les équations des courbes données.

C'est ainsi qu'on pouvait achever, sans le secours de l'équation $\varphi''-\varphi'=0$, que les méthodes de Bernoulli et d'Euler ne donnaient pas la solution des problêmes semblables au précédent, toutes les fois que l'on savait obtenir l'intégrale proposée; mais en considérant que cette intégrale est une fonction implicite des quantités qui se rapportent à ses limites, M. Poisson, au moyen de la différentiation sous le signe $\int$ (*note*, p. 371), a cherché immédiatement, par rapport à ces quantités, les conditions du *maximum* absolu de l'intégrale proposée, et est parvenu à l'équation $\varphi''-\varphi'=0$, telle qu'elle résulte de la méthode des variations.

337. Le problême du n° précédent étant transporté dans l'espace, conduit à déterminer z et y, en fonctions de x, dans l'expression $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. En faisant $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds$, il vient,

$$\int\delta\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\int\frac{dx}{ds}d\delta x+\int\frac{dy}{ds}d\delta y+\int\frac{dz}{ds}d\delta z=$$
$$\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z-\int\left(d\frac{dx}{ds}\delta x+d\frac{dy}{ds}\delta y+d\frac{dz}{ds}\delta z\right).$$

La partie affectée du signe $\int$, fournit les trois équations

$$d\frac{dx}{ds}=0,\quad d\frac{dy}{ds}=0,\quad d\frac{dz}{ds}=0,$$

dont toutes les combinaisons 2 à 2 s'accordent à donner

$$\frac{dz}{dx}=\textit{const.},\qquad \frac{dz}{dy}=\textit{const.}$$

et montrent que la ligne cherchée est droite.

Si cette droite doit être menée entre un point fixe et une surface courbe dont l'équation différentielle soit

$$dz = pdx + qdy,$$

il faudra qu'à la dernière limite $\delta z'' = p\delta x'' + q\delta y''$. La première étant fixe, rendra $\varphi' = 0$, et la valeur de $\delta z''$ changera $\varphi'' = 0$, en

$$(dx'' + p''dz'')\delta x'' + (dy'' + q''dz'')\delta y'' = 0;$$

égalant à zéro les coefficiens des variations indépendantes, il viendra

$$dx'' + p''dz'' = 0, \quad dy'' + q''dz'' = 0,$$

d'où l'on verra, par le n° 143, que la droite cherchée est normale à la surface donnée.

Si la plus courte ligne cherchée doit être toute entière sur une surface courbe donnée, il faudra que les variations δx, δy, δz, sous le signe $\int$, satisfassent à l'équation différentielle de cette surface, que je représenterai par $dz = pdx + qdy$; on fera donc

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

dans δU, qui deviendra, par cette substitution,

$$\left(\frac{dx}{ds} + p\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{ds} + q\frac{dz}{ds}\right)\delta y,$$

$$-\int\left\{\left(d\frac{dx}{ds} + pd\frac{dz}{ds}\right)\delta x + \left(d\frac{dy}{ds} + qd\frac{dz}{ds}\right)\delta y\right\}.$$

De la partie affectée du signe $\int$, on tire les équations

$$d\frac{dx}{ds} + pd\frac{dz}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} + qd\frac{dz}{ds} = 0,$$

dont une seule suffit, conjointement avec celle de la surface donnée, pour déterminer la nature de la ligne la plus courte qu'on puisse mener sur cette surface, entre deux de ses points.

En supposant que cette ligne doive être menée entre un point fixe et une courbe prise sur la même sur-

face, on aura d'abord $\varphi'=0$; et désignant par $dy=ndx$, l'équation différentielle de la projection sur le plan des x, y, de la courbe donnée, il viendra $\delta y''=n''\delta x''$; puis l'équation $\varphi''=0$, se changeant en

$$dx''+p''dz''+(dy''+q''dz'')\,n''=0,$$

exprimera que les deux courbes dont il s'agit se coupent à angle droit

338. Je vais encore chercher la relation de x à y, propre à rendre *minimum* l'expression $\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2(y-Y)}}$, dans laquelle je considérerai Y comme une fonction des coordonnées x' et y', x'' et y'', relatives aux limites (*).

Pour résoudre la question dans toute sa généralité, il faut faire varier Y, aussi bien que y (335). Soit

$$\sqrt{2(y-Y)}=u,\qquad \sqrt{dx^2+dy^2}=ds,$$

il viendra

$$\delta u=\frac{\delta y-\delta Y}{u},\qquad \delta s=\frac{dx}{ds}d\delta x+\frac{dy}{ds}d\delta y;$$

$$\text{et}\int\delta\frac{ds}{u}=-\int\frac{ds}{u^3}(\delta y-\delta Y)+\int\frac{dx}{uds}d\delta x+\int\frac{dy}{uds}d\delta y$$

$$=\delta Y\int\frac{ds}{u^3}+\frac{dx}{uds}\delta x+\frac{dy}{uds}\delta y$$

$$-\int\left\{d\frac{dx}{uds}\,\delta x+\left(\frac{ds}{u^3}+d\frac{dy}{uds}\right)\delta y\right\}.$$

On tire des termes affectés du signe $\int$, les équations

$$d\frac{dx}{uds}=0,\qquad \frac{ds}{u^3}+d\frac{dy}{uds}=0;$$

(*) Ce problème est celui de la Brachystochrone, courbe le long de laquelle un corps descend dans le moins de temps possible, d'un point à un autre.

la première, qui est la plus simple, donne

$$\frac{dx}{uds}=C,\quad \text{d'où}\quad \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=C\sqrt{2(y-Y)}.$$

Ce résultat indique une cycloïde (102); car si on fait $y-Y=z$, on déduira

$$dx=\frac{dz\sqrt{2C^2}.\sqrt{z}}{\sqrt{1-2C^2z}}=\frac{zdz}{\sqrt{\frac{1}{2C^2}z-z^2}},$$

Lorsque $\delta Y=0$, la quantité φ donne, pour les limites, les équations

$$dx''\delta x''+dy''\delta y''=0,\quad dx'\delta x'+dy'\delta y'=0,$$

d'après lesquelles on reconnaîtra, comme dans le n° 336, que, si la courbe cherchée est menée entre deux autres, elle doit les rencontrer à angle droit.

Quand δY n'est pas nul, il faut calculer la valeur de $\int\frac{ds}{u^3}$, entre les limites de l'intégrale proposée; or l'équation

$$\frac{ds}{u^3}+d\frac{dy}{uds}=0,$$

fournie par le coefficient de δy sous le signe $\int$, donne

$$\int\frac{ds}{u^3}=-\frac{dy}{uds}+const.$$

et en observant que δY, ne dépendant point des variables indéterminées x et y, ne doit pas changer d'une limite à l'autre, l'équation $\varphi''-\varphi'=0$, devient

$$\left.\begin{aligned}-\frac{dy''}{u''ds''}\delta Y+\frac{dx''}{u''ds''}\delta x''+\frac{dy''}{u''ds''}\delta y''\\ +\frac{dy'}{u'ds'}\delta Y-\frac{dx'}{u'ds'}\delta x'-\frac{dy'}{u'ds'}\delta y'\end{aligned}\right\}=0.$$

Si on prend seulement $Y=y'$, d'où il suit $\delta Y=\delta y'$,

on aura, en réduisant et séparant les variations relatives à chaque limite,

$$\frac{dx''}{u''ds''}\delta x''+\frac{dy''}{u''ds''}\delta y''=0, \qquad \frac{dx'}{u'ds'}\delta x'+\frac{dy''}{u''ds''}\delta y'=0;$$

puis faisant ensuite, comme dans le n° 336,

$$\delta y''=n''\delta x'', \qquad \delta y'=m'\delta x',$$

et se rappelant que $\frac{dx}{uds}=C$, les équations ci-dessus prendront la forme

$$C+\frac{dy''}{u''ds''}n''=0, \quad C+\frac{dy''}{u''ds''}m'=0,$$

d'après laquelle $n''=m'$. Ce résultat fait voir qu'aux points où la courbe cherchée rencontre les courbes données, celles-ci doivent avoir leurs tangentes parallèles. De plus, l'équation relative à la dernière limite, revenant à

$$dx''\delta x''+dy''\delta y''=0,$$

montre encore que la courbe cherchée doit couper à angle droit, la seconde courbe donnée.

339. Les problêmes précédens se rapportent à des *maxima* ou à des *mimima* absolus ; mais la question de *trouver parmi toutes les relations que peuvent avoir entr'elles les variables* x, y, *et qui donnent une même valeur à l'intégrale indéterminée* $\int U_1$, *prise depuis* $x=x'$ *jusqu'à* $x=x''$, *celle qui rend la formule* $\int U$ *un* maximum *ou un* minimum, *dans les mêmes circonstances*, appartient aux *maxima* et aux *minima relatifs*. Elle se resout en égalant à zéro la variation de la fonction $\int U+a\int U_1$, a étant un coefficient constant indéterminé. Ce n'estpas ici le lieu de démontrer en détail cette règle; on conçoit d'ailleurs que si la fonction ci-dessus est un *maximum*, ou un *minimum*, et que l'on fasse $\int U_1=A$,

l'intégrale $\int U$ aura toujours la plus grande ou la plus petite des valeurs qu'elle pourrait prendre dans cette hypothèse. Le coefficient indéterminé a sert à remplir la condition $\int U_1 = A$.

Si par exemple on demandait *la courbe qui, sous un périmètre donné, renferme le plus grand ou le plus petit espace*, on aurait

$$\int U + a\int U_1 = \int\{y\,dx + a\sqrt{dx^2+dy^2}\}:$$

en faisant $\sqrt{dx^2+dy^2} = ds$, la partie de la variation affectée du signe $\int$, serait

$$-\int\left\{\left(dy + a\,d\frac{dx}{ds}\right)\delta x - \left(dx - a\,d\frac{dy}{ds}\right)\delta y\right\},$$

et donnerait, pour déterminer la courbe cherchée,

l'équation $$dx - a\,d\frac{dy}{ds} = 0,$$

dont l'intégrale qui est

$$x - a\frac{dy}{ds} = C, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{(x-C)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-C)^2}},$$

désigne évidemment un cercle dont le rayon est a.

Ce rayon se détermine d'après la valeur assignée au périmètre $\int\sqrt{dx^2+dy^2}$; la constante C et celle qu'introduirait l'intégration qui reste à effectuer, peuvent servir à faire passer le cercle par des limites fixes et données. Il est doué du *maximum* d'aire, lorsqu'il tourne sa concavité vers l'axe des abscisses et du *minimum*, si le contraire a lieu. Tel est le cas le plus simple du *problême des isopérimètres*, ainsi nommé, parceque l'on n'y considéra d'abord que des courbes de meme périmètre.

APPENDICE

APPENDICE

AU

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Des Différences et des Séries.

Du calcul direct des Différences.

540. DANS le calcul différentiel, on n'a fait varier les fonctions que pour considérer la forme des termes de leur développement, ou les limites des rapports de leurs accroissemens à ceux des variables dont elles dépendent; mais sans avoir aucun égard aux valeurs de ces accroissemens. Dans le calcul des différences au contraire, le but est de déterminer les accroissemens eux-mêmes, en les déduisant non-seulement de l'expression analytique des fonctions, mais aussi de leurs valeurs numériques ou particulières, lorsque l'expression analytique manque. Je vais d'abord faire connaître les signes qu'on emploie pour distinguer ces accroissemens, des différentielles.

541. Quand la fonction u, soit en vertu des variations qu'elle éprouve par elle-même, soit par l'effet de celles

qui arrivent à des quantités dont elle dépend, reçoit une suite de valeurs diverses, que je représenterai par $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$, on fait

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u \ = \Delta u \\ u_2 - u_1 \ = \Delta u_1 \\ u_3 - u_2 \ = \Delta u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

en se servant de la caractéristique Δ, pour désigner la différence qui existe entre les deux états consécutifs d'une même quantité (*). Lorsque cette quantité varie par des degrés égaux, les différences $\Delta u, \Delta u_1, \Delta u_2$, etc. sont toutes égales : c'est ce qui arrive entre les termes de la progression par différences (ou arithmétique).

Quand cette circonstance n'a pas lieu, on fait, par analogie,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_1 - \Delta u \ = \Delta . \Delta u \ = \Delta^2 u \\ \Delta u_2 - \Delta u_1 \ = \Delta . \Delta u_1 \ = \Delta^2 u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta . \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Les quantités $\Delta^2 u$, $\Delta^2 u_1$, etc. étant les différences des différences Δu, Δu_1, etc. se nomment *différences secondes*, pour les distinguer des autres qu'on appelle *différences premières*.

Si les différences secondes ne sont pas toutes égales, c'est-à-dire ne sont pas *constantes*, on peut passer à des *différences troisièmes*, qui s'expriment ainsi :

(*) Les chiffres inférieurs, déjà employés dans le cours de cet ouvrage, marquent spécialement dans ce qui suit, le rang qu'occupent les diverses valeurs d'une même fonction, et se nomment *indices*.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u \quad = \Delta\,.\,\Delta^2 u \quad = \Delta^3 u \\ \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 \quad = \Delta\,.\,\Delta^2 u_1 \quad = \Delta^3 u_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n-1} = \Delta\,.\,\Delta^2 u_{n-1} = \Delta^3 u_{n-1} \\ \text{etc.}\end{array}\right\}\ldots\ldots(3),$$

En poursuivant de cette manière, on tire des valeurs u, u_1, u_2, ... u_n, une suite de différences dont le nombre des ordres est, au plus, égal à celui de ces valeurs, diminué de l'unité.

Soient pour exemple les nombres 3, 7, 23, 57 ; on en tire le tableau suivant :

	diff. 1re.	diff. 2ème.	diff. 3ème.
3			
	4		
7		12	
	16		6
23		18	
	34		
57			

dont la première colonne contient les nombres proposés, la seconde leurs différences, la troisième les différences de celles-ci, ou les différences secondes, la quatrième les différences des différences secondes, ou les différences troisièmes; ensorte que si on designe par u le premier des nombres proposés, le premier nombre de la deuxième colonne sera Δu, celui de la troisième $\Delta^2 u$; celui de la quatrième enfin $\Delta^3 u$: et parconséquent on aura dans cet exemple

$$u = 3, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta^2 u = 12, \quad \Delta^3 u = 6.$$

On trouverait de la même manière toutes les différences d'une suite quelconque de nombres, en observant que lorsque deux différences consécutives du

même ordre sont égales, la différence de l'ordre suivant est zéro, et que quand il faut, pour l'obtenir, changer l'ordre des soustractions, on doit lui donner le signe —. Voici un exemple où ces circonstances sont réunies :

	diff. 1ère.	*diff.* 2ème.	*diff.* 3ème.	*diff.* 4ème.	*diff.* 5ème.
1					
	3				
4		— 5			
	— 2		8		
2		3		— 6	
	1		2		0
3		5		— 6	
	6		— 4		
9		1			
	7				
16					

on a donc ici

$$u=1,\ \Delta u=3,\ \Delta^2 u=-5,\ \Delta^3 u=8,\ \Delta^4 u=-6,\ \Delta^5 u=0.$$

342. Il y a entre les quantités u, u_1, u_2, u_3, etc., et leurs différences successives des divers ordres, des relations telles qu'on en peut déduire des expressions de u, u_1, u_2, u_3, etc., qui ne dépendent que de la quantité primordiale u et de ses différences.

On tire d'abord des équations (1), (2), (3)

$$\begin{array}{l|l|l}
u_1=u\ +\Delta u & & \\
u_2=u_1\ +\Delta u_1 & \Delta u_1\ =\Delta u\ +\Delta^2 u & \\
u_3=u_2\ +\Delta u_2 & \Delta u_2\ =\Delta u_1\ +\Delta^2 u_1 & \Delta^2 u_1\ =\Delta^2 u\ +\Delta^3 u \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n=u_{n-1}+\Delta u_{n-1} & \Delta u_{n-1}=\Delta u_{n-2}+\Delta^2 u_{n-2} & \Delta^2 u_{n-2}=\Delta^2 u_{n-3}+\Delta^3 u_{n-3};
\end{array}$$

puis faisant les substitutions nécessaires, on obtiendra

$$u_1=u+\Delta u$$
$$u_2=u+2\Delta u+\Delta^2 u$$
$$u_3=u+3\Delta u+3\Delta^2 u+\Delta^3 u$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où on conclut par analogie,

$$u_n=u+\frac{n}{1}\Delta u+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

puisque les coefficiens numériques des expressions précédentes sont les mêmes que ceux des puissances du binome : on pourrait d'ailleurs facilement vérifier d'une manière générale cette conclusion.

343. On peut également exprimer la différence d'un ordre quelconque, $\Delta^n u$, par le moyen des valeurs consécutives u, u_1, u_2......etc. on tire d'abord des équations (1), (2), (3),

$$\Delta u=u_1-u$$
$$\Delta^2 u=u_2-2u_1+u$$
$$\Delta^3 u=u_3-3u_2+3u_1-u$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et l'analogie indique l'expression générale

$$\Delta^n u=u_n-\frac{n}{1}u_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3}+\text{etc.}$$

Je ne m'arrêterai point à appliquer ces formules aux exemples numériques donnés plus haut ; je ferai seulement observer que l'on peut écrire les équations

$$u_n=(1+\Delta u)^n,\qquad \Delta^n u=(u-1)^n,$$

pourvu que l'on se rappelle de changer dans le dévelop-

pement de la première, les exposans des puissances de Δu en exposans de la caractéristique Δ, et dans celui de la seconde, les exposans de u en indices.

344. Lorsqu'une fonction est donnée, rien n'est plus facile que d'en obtenir les différences successives; je prendrai pour exemple la fonction x^m. Faisant $u = x^m$, et supposant que x augmente de la quantité h, on aura $u_1 = (x+h)^m$, et parconséquent

$$\Delta u = (x+h)^m - x^m = mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^3 + \text{etc.}$$

Pour passer aux différences ultérieures $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. il faut faire varier x de nouveau, ce qui présente deux hypothèses; l'une consiste à supposer que la quantité x prenne toujours des accroissemens égaux, et l'autre que ces accroissemens soient eux-mêmes variables : je ne m'occuperai ici que de la première. En substituant $x+h$ au lieu de x dans Δu, on aura

$$\Delta u_1 = mh(x+h)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}h^2(x+h)^{m-2} + \text{etc.}$$

Il est visible que si on développe l'expression de Δu_1, et que l'on en retranche celle de Δu, le résultat ordonné par rapport aux puissances de h, sera de la forme

$$\Delta^2 u = m(m-1)x^{m-2}h^2 + M_3 x^{m-3}h^3 + M_4 x^{m-4}h^4 + \text{etc.}$$

M_3, M_4, etc. désignant des coefficiens dépendans de l'exposant m.

Par une nouvelle substitution de $x+h$ dans cette dernière équation, on parviendrait à $\Delta^2 u_1$, et, en observant que $\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u$, on obtiendrait

$$\Delta^3 u = m(m-1)(m-2)x^{m-3} + M'_4 x^{m-4} + \text{etc.}$$

La loi des premiers termes de chacun de ces développemens est évidente, et l'on voit que l'expression de $\Delta^n u$ doit commencer par

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n.$$

On voit aussi que, quand l'exposant m est entier et positif, le nombre des termes du développement de $\Delta^n u$, ordonné suivant les puissances de x, diminue de l'unité, lorsque n augmente de cette quantité et que quand $n=m$, il vient

$$\Delta^m u = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots h^m.$$

Cette différence étant constante, il s'ensuit que celles des ordres supérieurs sont nulles.

On parvient facilement au terme général de $\Delta^n u$ en formant l'expression de cette différence par le moyen des valeurs de u_1, u_2, u_3, etc. sans passer par celles de Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. Il est évident que dans l'hypothèse présente les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots u_n,$$

répondent à

$$x+h, \quad x+2h, \quad x+3h, \ldots\ldots x+nh,$$

et l'on a parconséquent

$$u_1 = (x+h)^m, \quad u_2 = (x+2h)^m, \ldots\ldots u_n = (x+nh)^m;$$

on tirera de là

$$\Delta^n u = [x+nh]^m - \frac{n}{1}[x+(n-1)h]^m$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}[x+(n-2)h]^m$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}[x+(n-3)h]^m + \text{etc.}$$

Si l'on désigne par i l'exposant de h dans le terme général du développement de l'équation ci-dessus, l'expression de ce terme sera

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i}x^{m-i}h^i \times$$
$$\left\{n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{etc.}\right\};$$

mais comme on vient de voir que le développement de $\Delta^n u$ ne pouvait contenir des puissances de h dont l'exposant fût moindre que n, il s'ensuit que la fonction

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{etc.}$$

composée de $n+1$ termes, est nulle tant que $i < n$. D'un autre côté, le coefficient

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i}$$

s'évanouissant lorsque $i = m+1$, il en résulte que la plus haute puissance de h, dans le développement de $\Delta^n u$, ne peut etre que h^m.

D'après la propriété du monome x^m, toute fonction rationnelle et entière de x a toujours des différences constantes, savoir, celles dont l'ordre est marqué par l'exposant de la plus haute puissance de x, qui soit dans la fonction proposée. En effet, cette fonction

étant de la forme $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma +$ etc. on aura nécessairement

$$\Delta^n(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.}) = A\Delta^n.x^\alpha + B\Delta^n.x^\beta + C\Delta^n.x^\gamma + \text{etc.}\ (*);$$

et si α désigne le plus haut exposant de x, il viendra pour le cas où $n = \alpha$,

$$\Delta^\alpha.x^\alpha = 1.2\ldots.\alpha h^\alpha,\quad \Delta^\alpha.x^\beta = 0,\quad \Delta^\alpha.x^\gamma = 0,\ \text{etc.}$$

ensorte que

$$\Delta^\alpha(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{etc.}) = 1.2.3\ldots\ldots\alpha Ah^\alpha.$$

Il n'est pas nécessaire d'avertir que chaque fois qu'on prend la différence de deux fonctions, cette opération peut faire disparaître une constante; car les calculs précédens ne diffèrent de ceux du n° 7, qu'en ce que l'on considère en même temps tous les termes du développement de la différence, au lieu de se borner au premier, comme pour le Calcul différentiel.

Au moyen de ce qui précède on développerait sans difficulté les différences d'une fonction composée de puissances quelconques de x; mais avant de pousser plus loin, il convient de montrer comment les mêmes développemens, et en général ceux des différences des fonctions quelconques, peuvent s'obtenir par le moyen du Calcul différentiel.

345. Le Calcul différentiel et celui des différences,

(*) Il ne faut pas confondre $\Delta^n.x^\alpha$ avec $\Delta^n x^\alpha$; car la première de ces expressions est la différence de l'ordre n de la fonction x^α, tandis que $\Delta^n x^\alpha = (\Delta^n x)^\alpha$.

quoiqu'étant bien distincts, comme on le verra dans la suite, ont néanmoins de grands rapports entr'eux, et peuvent s'appliquer l'un à l'autre. Lorsque l'on considère le premier sous le point de vue où l'a présenté Leibnitz, ou par la théorie des limites, il devient un cas particulier du second; on a dû le remarquer au commencement de cet ouvrage, et pour le confirmer encore, je déduirai la série de Taylor, de l'équation

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

En donnant à cette équation la forme

$$u_n = u + \frac{n\alpha}{1}\frac{\Delta u}{\alpha} + \frac{n(n-1)\alpha^2}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{\alpha^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\alpha^3}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{\alpha^3} + \text{etc.}$$

et supposant que α soit l'accroissement que reçoit x lorsque la fonction u devient $u + \Delta u$, la valeur u_n sera celle que prend u, quand x se change en $x + n\alpha$. Faisant ensuite $n\alpha = h$, on aura $\alpha = \frac{h}{n}$, d'où on voit que α diminue à mesure que n augmente; et en observant que

$$n(n-1)\alpha^2 = n^2\alpha^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$n(n-1)(n-2)\alpha^3 = n^3\alpha^3\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

etc.

on trouvera que ces expressions, relativement à l'augmentation de n, ont pour limites,

$$n^2\alpha^2,\quad n^3\alpha^3,\ \text{etc.}$$

tandis que les rappports

$$\frac{\Delta u}{\alpha},\quad \frac{\Delta^2 u}{\alpha^2},\quad \frac{\Delta^3 u}{\alpha^3},\ \text{etc.}$$

ont pour limites, dans la même circonstance, où α diminue,

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{d^2u}{dx^2},\quad \frac{d^3u}{dx^3},\ \text{etc.}$$

on aura donc

$$u+\frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

pour le développement de la fonction u, quand x est devenu $x+h$. C'est à peu près ainsi que Taylor est arrivé au théorême ci-dessus qui porte son nom.

Lorsqu'une fois on est parvenu au théorême de Taylor, la théorie analytique du Calcul différentiel n'offre plus aucune difficulté; ainsi ce qui précède suffit pour montrer comment il résulte du Calcul des différences (*).

(*) Cette manière de présenter le Calcul différentiel peut avoir ses avantages, mais elle me semble moins simple que celle dont j'ai fait usage au commencement de ce traité; au reste, j'ai lieu de croire que tout bon esprit qui aura rapproché les divers points de vue sous lesquels on présente ce Calcul, reconnaîtra que pour le fond ce sont les mêmes idées, et qu'en leur donnant les développemens necessaires on parvient toujours à des conséquences également évidentes. Je ferai principalement remarquer que de quelque source que l'on tire le Calcul différentiel, sa notation ne doit pas changer, et qu'elle réunit tous les avantages que l'on peut desirer dans les signes algébriques. Je ne crois pas que ceux qui

346. A l'aide du théorême de Taylor, le développement des différences d'un ordre quelconque pour une

---

auront bien saisi l'origine de cette notation dans le n° 5, puissent révoquer en doute son analogie avec les principes que Lagrange emploie dans sa *Théorie des fonctions analytiques*; elle est même plus propre que toute autre à en rappeler le souvenir. Quelles que soient les notions préliminaires, *le coefficient différentiel*, ou *la fonction prime* (d'après Lagrange), sera toujours la fonction qui multiplie la première puissance de l'accroissement dans le développement de la différence de la fonction primitive; en prenant le premier terme seul on aura une différence tronquée, ou *une différentielle*, et cela, *sans rien prononcer sur sa grandeur absolue*, *sans rappeler en aucune manière l'idée d'infiniment petit*. Le changement de métaphysique ne saurait donc conduire à un changement de notation, si, comme il est aisé de s'en convaincre, la notation ancienne a des avantages marqués sur celles qu'on voudrait lui substituer. Il faut d'abord observer qu'elle doit être débarrassée des parenthèses qu'Euler employait. En effet, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont aussi clairs que $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$; car le sens de la question indique toujours si les variables x et y sont indépendantes ou non, et empêche qu'on ne confonde l'expression $\frac{dz}{dx}$ avec $\frac{\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy}{dx}$, qui ne signifie quelque chose qu'autant qu'on regarde (au moins implicitement) y comme une fonction de x. Voyez d'ailleurs le n° 126.

Les notations employées dans la *Théorie des Fonctions* ne me paraissent pas offrir les mêmes avantages. Les accens ne peuvent servir seuls, que lorsqu'il s'agit des fonctions d'une ou de deux variables, en affectant les accens supérieurs aux variations de l'une et les accens inférieurs à celles de l'autre. Pour aller au-delà, l'illustre Auteur de cet ouvrage, écrit entre parenthèses la quantité ou les quantités qu'il regarde comme variables, et désigne par

$$f'(x),\quad f'(y),\quad f'(z),$$
$$f''(x),\quad f''(y),\quad f''(z),\quad f''(x,y),\quad f''(x,z),\quad f''(y,z),$$

les coefficiens différentiels du premier et du second ordre pour la

fonction quelconque s'obtient sans difficulté : on a premièrement

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

---

fonction $f(x, y, z)$ (*Théorie des Fonctions*, page 192). Il a modifié depuis sa notation dans le traité qu'il a publié sur la résolution des équations numériques, où il représente les mêmes coefficiens comme il suit :

$$\left(\frac{Z'}{x'}\right),\ \left(\frac{Z'}{y'}\right),\ \left(\frac{Z'}{z'}\right),$$
$$\left(\frac{Z''}{x'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{y'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{z'^2}\right),\ \left(\frac{Z''}{z'y'}\right),\ \left(\frac{Z''}{x'z'}\right),\ \left(\frac{Z''}{y'z'}\right),$$

Z étant la fonction primitive proposée.

En partageant avec toute l'Europe le respect attaché au nom et aux travaux de Lagrange, j'oserai néanmoins n'être pas de l'avis de cet homme si justement célèbre, sur les motifs qui paraissent le porter à introduire cette nouvelle manière d'écrire les résultats du Calcul différentiel; car je crois avoir prouvé dans ce qui précède que l'ancienne n'a point en elle-même l'inconvénient de *rappeler continuellement l'idée fausse des infiniment petits* : et je demanderai si la multitude de parenthèses très-resserrées, qui résulterait des signes qu'il propose, ne rendrait pas les formules aussi longues et aussi chargées, que l'emploi de la caractistique d. J'avouerai même que sa seconde notation ne comportant point de dénominateurs qui, dans l'impression, exigent une double ligne, me paraît préférable à sa dernière, semblable à celle d'Euler et de Waring, dont elle ne diffère que par les accens qui tiennent la place des d, dont le premier se servait avec tous les Géomètres sortis de l'école de Leibnitz, et des points dont le second a fait usage, ainsi que tous les Géomètres anglais. Voici un exemple de chacune de ces notations :

$$\left(\frac{d^3Z}{dx^2dy}\right),\quad \left(\frac{\dddot{Z}}{\dot{x}^2\dot{y}}\right),\quad \left(\frac{Z'''}{x'^2y'}\right).$$

J'observerai que la dernière priverait souvent les analystes de la

et comme Δu est ce que devient Δu_1, lorsque x se change en $x+h$, il s'ensuit

$$\Delta u_1 = \Delta u + \frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

d'où

---

faculté de représenter des quantités analogues par la même lettre accentuée diversement, ce qui serait un inconvénient assez grave.

C'est, je pense, un principe avoué de tout le monde, qu'il ne faut changer les signes reçus que lorsqu'ils sont en contradiction manifeste avec les idées qu'ils doivent représenter, ou lorsqu'on peut les abréger, ou enfin lorsqu'en les modifiant, on les rend propres à développer de nouveaux rapports qu'on n'aurait pas apperçus sans cela. Les signes du Calcul différentiel ne sont dans aucun de ces cas : tout ce dont Lagrange a enrichi l'Analyse dans sa *Théorie des Fonctions*, et dans son *Traité de la résolution des équations numériques*, peut être exprimé avec autant de simplicité que d'élégance par les caractères usités, comme on peut le voir dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (in-4°) pour lequel j'ai profité avec empressement de plusieurs remarques importantes insérées dans les excellens écrits que je viens de citer. Il y a plus, j'ai la persuasion que le Calcul des fonctions ne saurait atteindre à rien que le grand Géomètre, qui en est l'inventeur, ne puisse déduire du Calcul différentiel. On ne saurait d'ailleurs contester que le passage de l'Algèbre au Calcul différentiel, ce dernier étant présenté comme l'a fait Lagrange dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1772, ou, comme je l'ai fait d'après lui, dans le premier volume de mon Traité *in-4°*, et même par les limites comme dans celui-ci, ne soit aussi simple que le passage de l'Algèbre au Calcul des fonctions. Enfin je crois qu'avant d'adopter de nouveaux signes, il faut penser à l'embarras qu'éprouveraient ceux qui étudient les mathématiques, d'avoir à rapprocher sans cesse des formules et des opérations analogues rendues par des caractères différens; et c'est la crainte de voir ouvrir cette nouvelle source de difficultés, qui m'a engagé à entrer dans des détails dont la longueur sera justifiée par l'influence que ne peut manquer d'exercer l'homme célèbre qui semble projeter une révolution à cet égard.

$$\Delta^2 u = \frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

on trouvera de même

$$\Delta^3 u = \frac{d\Delta^2 u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta^2 u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^4 u = \frac{d\Delta^3 u}{dx}\frac{h}{1} + \text{etc.}$$

etc.

En effectuant les développemens successifs indiqués ci-dessus, il viendra

$$\begin{aligned}\Delta^2 u = \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1} &+ \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{etc.}\\ &+ \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.2} + \text{etc.}\\ &+ \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{etc.}\end{aligned}$$

Il serait facile de trouver la loi que suivent les termes de cette expression, mais on y parvient d'une manière plus générale, au moyen de l'analogie qui existe entre la différentiation des quantités et leur élévation aux puissances, analogie dont le n° 125 renferme les premières traces.

347. On a vu (24) que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et il suit de cette formule que

$$e^{\frac{du}{dx}h}=1+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$e^{\frac{du}{dx}h}-1=\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Si maintenant on transporte les exposans des puissances de du à la caractéristique d, le second membre de l'équation précédente deviendra

$$\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et sera la même chose que Δu ; on aura donc

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h}-1,$$

pourvu que dans le développement du second membre on transporte à la caractéristique d les exposans des puissances de du.

D'après ce résultat, Lagrange a remarqué le premier qu'on avait en général $\Delta^n u=\left(e^{\frac{du}{dx}h}-1\right)^n$, en observant toujours de transporter à la caractéristique d les exposans des puissances de du ; et voici comment Laplace a démontré cette proposition :

Il est évident par ce qui a été dit dans le n° précédent, que, quelle que soit l'expression de $\Delta^n u$, on doit avoir

$$\Delta^n u=\frac{d^n u}{dx^n}h^n+A'\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1}+A''\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2}+\text{etc.}$$

A',

A', A'', etc. désignant des coefficiens qui ne dépendent que de n. Cette équation devant subsister pour toutes les formes que peut prendre la fonction u, conviendra nécessairement au cas où $u=e^x$; mais alors

$$\frac{du}{dx}=\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^3u}{dx^3}=\text{etc.}=e^x$$

$$\Delta u=e^{x+h}-e^x=e^x(e^h-1),\ \Delta^2u=(e^h-1)(e^{x+h}-e^x)=e^x(e^h-1)^2,$$
$$\Delta^3u=e^x(e^h-1)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^n u=e^x(e^h-1)^n.$$

Substituant cette valeur de $\Delta^n u$, dans le premier membre de l'équation posée plus haut, et celles de $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. dans le second, il viendra

$$(e^h-1)^n=h^n+A'h^{n+1}+A''h^{n+2}+\text{etc.}$$

d'où il suit que les coefficiens A', A'', etc. doivent être les mêmes que ceux du développement de $(e^h-1)^n$, puisque l'accroissement h doit demeurer indéterminé. Il ne peut d'ailleurs exister aucune difficulté à l'égard des coefficiens différentiels de u, qui se déduisent tous des puissances de du par le changement indiqué dans les exposans.

La même relation entre les puissances et les différences se retrouve dans les fonctions d'un nombre quelconque de variables, et se prouve d'une manière analogue.

348. De $\Delta u=e^{\frac{du}{dx}h}-1$ on tire $e^{\frac{du}{dx}h}=1+\Delta u$; et si on prend les logarithmes de part et d'autre, il viendra

$$\frac{du}{dx}h = \mathrm{l}(1 + \Delta u).$$

Lagrange a encore reconnu que cette équation serait vraie, si dans le développement de $\mathrm{l}(1 + \Delta u)$, on transportait à la caractéristique Δ, les exposans des puissances de Δu; on aurait par ce moyen

$$\frac{du}{dx}h = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u + \text{etc. (28).}$$

Au lieu-de m'arrêter à démontrer ce cas particulier, je vais prouver qu'en général

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n = \{\mathrm{l}(1 + \Delta u)\}^n,$$

en changeant Δu^2, Δu^3, etc. en $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. Il est visible que la question revient à déterminer les coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ... etc. en fonction des différences successives de u, et que pour cela on a des équations de la forme

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n}h^n + A'\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1} + A''\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^{n+1}u = \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1} + A'_1\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^{n+2}u = \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2} + \text{etc.}$$

dans lesquelles les coefficiens différentiels ne montent qu'au premier degré; on peut donc faire

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n = \Delta^n u + B'\Delta^{n+1}u + B''\Delta^{n+2}u + B'''\Delta^{n+3}u + \text{etc.}$$

On obtiendrait facilement la valeur des coefficiens inconnus B', B'', B''', etc. par l'élimination successive de

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1}, \qquad \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2}, \text{ etc.};$$

mais puisque l'équation hypothétique doit avoir lieu, quel que soit u, elle subsistera encore lorsqu'on y fera $u = e^x$, ce qui donnera

$$\frac{d^i u}{dx^i} = e^x \qquad \text{et} \quad \Delta^i u = e^x (e^h - 1)^i,$$

quelque valeur qu'ait le nombre entier i; et on trouvera parconséquent

$$h^n = (e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.}$$

Pour mettre en évidence l'identité des deux membres de cette équation, il suffit d'observer que

$$h^n = \{1(1 + e^h - 1)\}^n,$$

parceque le développement de $1(1 + e^h - 1)$, ordonné suivant les puissances de $e^h - 1$, et qui est

$$e^h - 1 - \tfrac{1}{2}(e^h - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(e^h - 1)^3 - \tfrac{1}{4}(e^h - 1)^4 + \text{etc.}$$

étant élevé à la puissance n, deviendra comparable à la série

$$(e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.}$$

dont les coefficiens numériques B', B'', etc. seront parconséquent déterminés. Si l'on écrit Δu, à la place de $e^h - 1$, et $\frac{d^n u}{dx^n}h^n$ à celle de h^n, on aura l'équation $\frac{d^n u}{dx^n}h^n = \{1(1 + \Delta u)\}^n$, posée précédemment.

En faisant pour abréger $e^h - 1 = \alpha$, et développant $(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \text{etc.})^n$, suivant les puissances de α, par la méthode du n° 45, on obtiendra les valeurs de B', B'', etc.

Application du Calcul des différences à l'interpolation des suites.

349. L'un des principaux usages du calcul des différences, a pour objet l'*interpolation des suites*, opération qui consiste à insérer entre les termes d'une suite, de nouveaux termes assujétis à la même loi que les premiers. Pour cela on regarde les différens termes de cette suite comme des valeurs particulières que reçoit la fonction qui exprime le terme général, lorsqu'on assigne également des valeurs particulières à la variable d'où dépend ce terme, et qui dépend elle-même du rang qu'il occupe dans la suite proposée. Quand l'expression de ce terme est donnée, on en tire autant de valeurs qu'on veut; mais il n'en est pas ainsi lorsqu'on ne connaît qu'un certain nombre des premiers termes de la suite, ce qui est le cas ordinaire auquel on applique l'interpolation.

Il faudrait alors déduire l'expression analytique d'une fonction, de celle d'un nombre limité de valeurs numériques, ce qui ne se peut quand la forme de la fonction est inconnue; car on doit observer que ce problème revient à former l'équation d'une courbe passant par les points, dont les valeurs de la variable indépendante représentent les abscisses, et celles de la fonction les ordonnées, et qu'en quelque nombre que soient ces points, ils ne sauraient particulariser la courbe, si elle n'est pas donnée d'espèce. Mais comme

on ne cherche à interpoler une suite que dans des espaces très-resserrés, on conçoit que l'expression de son terme général est développée suivant les puissances ascendantes de sa variable, et qu'il est permis de se borner à un petit nombre des premières puissances de cette variable ; par ce moyen, la forme de la fonction, qui est alors rationnelle, se trouve déterminée.

Ainsi sachant qu'aux valeurs

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \text{etc.}$$

d'une variable quelconque, répondent les valeurs

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{etc.}$$

d'une fonction de cette variable, on suppose que l'on ait pour toute autre valeur x',

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \text{etc.}$$

et on détermine les coefficiens α, β, γ, etc. par la condition que u' devienne successivement u, u_1, u_2, etc. lorsqu'on change x' en x, x_1, x_2, etc.

Cette détermination présente deux cas : le premier, dans lequel les valeurs x, x_1, x_2, x_3, etc. sont *équi-différentes*, se résout immédiatement par l'expression de u_n du n° 342.

En effet, quand on arrête la série

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \text{etc.}$$

à l'un de ses termes, que je désignerai par $\mu x'^m$, et qu'on prend les valeurs de x' dans la progression x, $x+h$, $x+2h$, etc. la fonction u a, dans l'ordre m, des différences constantes, et parconséquent à la va-

leur $x+nh$ de la variable x' répond

$$u_n = u + \frac{n}{1}\,\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\Delta^2 u$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots.m}\,\Delta^m u.$$

Dans cette formule, les quantités

$$u,\ \Delta u,\ \Delta^2 u,\ \text{etc.}\quad (341)$$

sont des nombres; si on y fait $x+nh=x'$, d'où il suit $n=\frac{x'-x}{h}$, elle se transformera en une fonction rationnelle et entière de x', du même degré que l'expression de u'; et puisqu'elle se change en u, u_1, u_2, etc. lorsqu'on y met 0, 1, 2, etc. pour n, elle prendra les mêmes valeurs quand x' deviendra x, $x+h$, $x+2h$, etc. : elle sera donc la fonction demandée.

On peut la simplifier en faisant $x'=x+h'$, ce qui donne

$$n=\frac{h'}{h},\quad \text{et}\quad u_n = u' =$$
$$u+\frac{h'}{h}\,\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\,\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\,\Delta^3 u + \text{etc.}$$

Enfin si on représente $u'-u$ par $\Delta' u$, il viendra

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\,\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\,\Delta^3 u + \text{etc.}$$

350. La formule que je viens de présenter se déduit aussi du théorême de Taylor, au moyen du n° 347, qui fait connaître les coefficiens différentiels

par les différences. En effet l'équation

$$\frac{d^i u}{dx^i} h^i = \Delta^i u + A' \Delta^{i+1} u + A'' \Delta^{i+2} u + A''' \Delta^{i+3} u + \text{etc.}$$

donne

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \frac{1}{h^i} (\Delta^i u + A' \Delta^{i+1} u + A'' \Delta^{i+2} u + \text{etc.})$$

Si on tirait successivement de cette équation les valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc. pour les substituer dans la série

$$u + \frac{du}{dx}\frac{h'}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h'^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h'^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui exprime ce que devient u lorsque x devient $x + h'$, on aurait un résultat de la forme

$$u + \frac{h'}{h} \Delta u + \left(B' \frac{h'}{h} + B'' \frac{h'^2}{h^2}\right) \Delta^2 u$$
$$+ \left(B'_1 \frac{h'}{h} + B''_1 \frac{h'^2}{h^2} + B'''_1 \frac{h'^3}{h^3}\right) \Delta^3 u + \text{etc.}$$

B', B'', B'_1, B''_1, B'''_1, etc. étant, ainsi que A', A'', etc. des coefficiens numériques indépendans de h ; et désignant par $\Delta' u$ l'accroissement que reçoit la fonction u dans le passage de x à $x + h'$, il viendrait

$$1 + \Delta' u = 1 + \frac{h'}{h} \Delta u + \left(B' \frac{h'}{h} + B'' \frac{h'^2}{h^2}\right) \Delta^2 u + \text{etc.}$$

Cette équation devant avoir lieu, quel que soit u, subsistera encore dans le cas où $u = e^x$, et se changera alors en

$$e^{h'}=1+\frac{h'}{h}(e^h-1)+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)(e^h-1)^2+\text{etc.}$$

équation dont on ramène, par le développement, le premier membre à la même forme que le second, en observant que $e^{h'}=[1+(e^h-1)]^{\frac{h'}{h}}$; et comme en remettant dans la seconde Δu, $\Delta^2 u$, etc. à la place des quantités e^h-1, $(e^h-1)^2$, etc. on retombe sur le développement de $1+\Delta' u$, on doit en conclure que

$$1+\Delta' u=(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}},$$

pourvu qu'on se rappelle de transporter à la caractéristique Δ, dans le second membre, les exposans des puissances de Δu.

Ce résultat, aussi simple qu'élégant, a été présenté par Lagrange comme une conséquence de l'analogie que les différences ont avec les puissances. En effet, il suit de l'équation $e^{\frac{du}{dx}h}=1+\Delta u$ (348) que $e^{\frac{du}{dx}h'}=(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, ce qui donne sur-le-champ $1+\Delta' u=(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, puisque $e^{\frac{du}{dx}h'}=1+\Delta' u$.

En développant le second membre de cette dernière équation, ainsi qu'il a été prescrit, on trouvera, comme dans le n° précédent,

$$\Delta' u=\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u$$
$$+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

531. Je passe maintenant à des applications. Si l'on désigne par u' ce que devient u, lorsque x se change en $x+h'$, on aura $u'=u+\Delta' u$; et il est visible que pour tirer parti de l'expression de $\Delta' u$, il faut, ou qu'elle se termine, ou du moins qu'elle forme une série convergente. Le premier cas a lieu toutes les fois que la suite des différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. se termine elle-même, c'est-à-dire, lorsque l'on parvient à un ordre dont les différences sont constantes, ce qui rend nulles celles du suivant.

Soit d'abord la suite

$$3, \quad 7, \quad 19, \quad 39, \quad 67, \quad \text{etc.}$$

correspondante aux indices

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \text{etc.}$$

on a pour ce cas,

$$u=3,\ x=0,\ h=1,\ \Delta u=4,\ \Delta^2 u=8,\ \Delta^3 u=0;$$

l'expression de $\Delta' u$ se réduit à ses deux premiers termes, et l'on obtient par son moyen

$$\Delta' u = 4h' + 4h'(h'-1) = 4h'^2:$$

ainsi pour l'indice h', il viendra $u'=3+4h'^2$. En prenant $h'=\frac{5}{2}$, par exemple, on trouverait que le terme correspondant à cet indice est 28.

Soit encore la suite

$$1, \quad 4, \quad 2, \quad 3, \quad 9, \quad 16, \quad \text{etc.}$$

en prenant les indices comme à l'ordinaire, savoir :

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \text{etc.}$$

et formant les différences, on trouvera

$$h=1,\ u=1,\ \Delta u=3,\ \Delta^2 u=-5,\ \Delta^3 u=8,\ \Delta^4 u=-6,\ \Delta^5 u=0,$$

d'où on tirera

$$u'=1+3\frac{h'}{1}-5\frac{h'(h'-1)}{1.2}+8\frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3}$$
$$-6\frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{1.2.3.4};$$

en réduisant cette expression, et l'ordonnant par rapport aux puissances de h', on aura

$$u'=\frac{12+116h'-111h'^2+34h'^3-3h'^4}{12}.$$

Il est important de remarquer que l'expression de u', dans cet exemple et dans le précédent, étant rigoureuse, et convenant à toutes les valeurs de h', offre le terme général de la suite proposée, puisqu'elle en donne tous les termes particuliers en y faisant successivement $h'=0$, $h'=1$, $h'=2$, etc.; et quoique je n'aye rapporté que les premiers termes de cette suite, on peut la continuer aussi loin qu'on voudra, suivant la loi observée dans ces termes. Il en sera toujours de même quand la série proposée aura des différences constantes, parcequ'elle ne peut résulter alors que des valeurs successives d'une fonction algébrique rationnelle et entière.

Les cas auxquels on applique le plus fréquemment la formule

$$\Delta' u=\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

sont ceux dans lesquels les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc.

vont en décroissant, parcequ'alors elle est convergente. En voici un exemple tiré des tables de logarithmes. Je suppose qu'on veuille obtenir le logarithme ordinaire de 3,14159 26536, par le moyen d'une table contenant les logarithmes depuis 1 jusqu'à 1000, avec dix décimales; on regardera alors les logarithmes contenus dans la table comme des valeurs particulières de la fonction u, les nombres comme les indices auxquels répondent ces valeurs; et on formera le tableau suivant :

$u=0{,}4969296481$				
	13809057			
$u_1=0{,}4983105538$		-43769		
	13765288		$+277$	
$u_2=0{,}4996870826$		-43492		-3
	13721796		$+274$	
$u_3=0{,}5010592622$		-43218		
	13678578			
$u_4=0{,}5024271200$				

dont la première colonne renferme les logarithmes de

$$3{,}14, \quad 3{,}15, \quad 3{,}16, \quad 3{,}17, \quad 3{,}18,$$

la seconde leurs différences premières, la troisième leurs différences secondes, la quatrième leurs différences troisièmes, et la cinquième leurs différences quatrièmes qui se réduisent à trois unités du dernier ordre. On aura par ce moyen

$$\Delta u=+0{,}0013809057, \quad \Delta^2 u=-0{,}0000043769,$$
$$\Delta^3 u=+0{,}0000000277, \quad \Delta^4 u=-0{,}0000000003;$$

et comme $h=0{,}01$, $h'=0{,}0015926536$, on obtiendra

$$\frac{h'}{h}=0{,}15926536, \quad \frac{h'-h}{2h}=\frac{h'}{2h}-\tfrac{1}{2}=-0{,}42036732$$
$$\frac{h'-2h}{3h}=\frac{h'}{3h}-\tfrac{2}{3}=-0{,}61357821,$$
$$\frac{h'-3h}{4h}=\frac{h'}{4h}-\tfrac{3}{4}=-0{,}71018366:$$

avec ces valeurs il sera très-facile de mettre en nombres la formule

$$u'=u+\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u$$
$$+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)(h'-3h)}{h.2h.3h.4h}\Delta^4 u,$$

qui donnera $u'=0,4971498726$.

Il existe des moyens plus faciles pour obtenir les logarithmes des nombres exprimés par beaucoup de chiffres, mais le précédent est très-propre à servir d'exemple pour la méthode d'interpolation. On doit reconnaître déjà que cette méthode s'étend à beaucoup d'autres cas; elle est surtout d'un très-grand usage dans les calculs astronomiques.

352. Lorsque les valeurs x, x_1, x_2, x_3, etc. ne sont pas *équidifférentes*, on emploie immédiatement la formule

$$u'=\alpha+\beta x'+\gamma x'^2+\delta x'^3+\text{etc.}$$

dans laquelle la substitution des valeurs particulières x, x_1, x_2, x_3, etc. fournit les équations

$$u=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}$$
$$u_1=\alpha+\beta x_1+\gamma x^2_1+\delta x^3_1+\text{etc.}$$
$$u_2=\alpha+\beta x_2+\gamma x^2_2+\delta x^3_2+\text{etc.}$$
$$u_3=\alpha+\beta x_3+\gamma x^2_3+\delta x^3_3+\text{etc.}$$
etc.

dont le nombre doit être égal à celui des coefficiens indéterminés α, β, γ, etc., et voici comment on obtient l'expression de ces coefficiens :

En retranchant successivement la première équation de la seconde, celle-ci de la troisième, etc. on par-

vient des résultats respectivement divisibles par x_1-x, x_2-x_1, x_3-x_2, etc. et d'où l'on tire

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\beta+\gamma(x_1+x)+\delta(x^2_1+x_1x+x^2)+\text{etc.}$$

$$\frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=\beta+\gamma(x_2+x_1)+\delta(x^2_2+x_2x_1+x^2_1)+\text{etc.}$$

$$\frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=\beta+\gamma(x_3+x_2)+\delta(x^2_3+x_3x_2+x^2_2)+\text{etc.}$$

etc.

Posant pour abréger

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=U,\quad \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=U_1,\quad \frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=U_2,\ \text{etc.}$$

on aura les équations

$$U=\beta+\gamma(x_1+x)+\delta(x^2_1+x_1x+x^2)+\text{etc.}$$
$$U_1=\beta+\gamma(x_2+x_1)+\delta(x^2_2+x_2x_1+x^2_1)+\text{etc.}$$
$$U_2=\beta+\gamma(x_3+x_2)+\delta(x^2_3+x_3x_2+x^2_2)+\text{etc.}$$

etc.

retranchant encore U de U_1, U_1 de U_2, et ainsi de suite, et désignant par U', U'_1, etc. les quantités

$$\frac{U_1-U}{x_2-x},\quad \frac{U_2-U_1}{x_3-x_1}\ \text{etc.}$$

on trouvera

$$U'=\gamma+\delta(x_2+x_1+x)+\text{etc.}$$
$$U'_1=\gamma+\delta(x_3+x_2+x_1)+\text{etc.}$$

d'où on tirera

$$U'_1-U'=\delta(x_3-x)+\text{etc.}$$

Maintenant si l'on fait

$$\frac{U'_1 - U'}{x_3 - x} = U'',$$

on aura $U'' = \delta +$ etc., et si pour fixer les idées on ne suppose que quatre termes à l'expression de u, l'opération sera terminée à l'équation ci-dessus; prenant la valeur qu'elle donne pour δ, et remontant à celles de γ, β, α, par le moyen des expressions U', U et u, il viendra

$$\begin{aligned}
\delta &= U'' \\
\gamma &= U' - U''(x_2 + x_1 + x) \\
\beta &= U - U'(x_1 + x) + U''(x_2x_1 + x_2x + x_1x) \\
\alpha &= u - Ux + U'x_1x - U''x_2x_1x.
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de u', on aura

$$\left.\begin{aligned} u' = u + U(x'-x) + U'[x'^2 - (x_1+x)x' + x_1x] \\ + U''[x'^3 - (x_2+x_1+x)x'^2 + (x_2x_1+x_2x+x_1x)x' - x_2x_1x] \end{aligned}\right\}.$$

Il est facile de voir que les coefficiens de U, U' et U'', sont décomposables en facteurs simples, et que l'on peut mettre u sous cette forme

$$\begin{aligned} u' = u + U(x'-x) + U'(x'-x)(x'-x_1) \\ + U''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2). \end{aligned}$$

En poursuivant d'après cette méthode, on obtiendrait une formule analogue à la précédente; et quel que fût le nombre des valeurs x, x_1, x_2,... de l'abscisse x', on aurait en général

$$\begin{aligned} u' = u + U(x'-x) + U'(x'-x)(x'-x_1) + U''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2) \\ + U'''(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3) + \text{etc.} \end{aligned}$$

en faisant

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=U\,,\ \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=U_1\,,\ \frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=U_2\,,\ \frac{u_4-u_3}{x_4-x_3}=U_3,\ \text{etc.}$$

$$\frac{U_1-U}{x_2-x}=U'\,,\ \frac{U_2-U_1}{x_3-x_1}=U'_1,\ \frac{U_3-U_2}{x_4-x_2}=U'_2,\ \text{etc.}$$

$$\frac{U'_1-U'}{x_3-x}=U''\,,\ \frac{U'_2-U'_1}{x_4-x_1}=U''_1,\ \text{etc.}$$

$$\frac{U''_1-U''}{x_4-x}=U''',\ \text{etc.}$$

etc.

Quand les valeurs x, x_1, x_2, x_3, etc. sont équidifférentes, on a

$$x_1-x=x_2-x_1=x_3-x_2,\ \text{etc.}$$

d'où il suit évidemment

$$x_1=x+h,\quad x_2=x+2h,\quad x_3=x+3h,\ \text{etc.}$$

$$U=\frac{\Delta u}{h},\quad U_1=\frac{\Delta u_1}{h},\quad U_2=\frac{\Delta u_2}{h},\quad U_3=\frac{\Delta u_3}{h},\ \text{etc.}$$

$$U'=\frac{\Delta^2 u}{1.2h^2};\quad U'_1=\frac{\Delta^2 u_1}{1.2h^2},\quad U'_2=\frac{\Delta^2 u_2}{1.2h^2},\ \text{etc.}$$

$$U''=\frac{\Delta^3 u}{1.2.3h^3},\ U''_1=\frac{\Delta^3 u}{1.2.3h^3},\ \text{etc.}$$

$$U'''=\frac{\Delta^4 u}{1.2.3.4h^4},\ \text{etc.}$$

etc.

faisant $x'=x+h'$, il en résultera

$$x'-x=h',\ x'-x_1=h'-h,\ x'-x_2=h'-2h,$$
$$x'-x_3=h'-3h,\ \text{etc.}$$

et l'on voit ainsi que l'expression précédente de u', qui devient alors

$$u' = u + \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u$$
$$+ \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

rentre dans celle du n° 349, obtenue par une voie bien différente.

353. Lagrange a presenté l'expression de u' sous une forme nouvelle, en observant que puisque les équations

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x + \delta x + \text{etc.}$$
$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x^2_1 + \delta x^3_1 + \text{etc.}$$
$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x^2_2 + \delta x^3_2 + \text{etc.}$$
etc.

sont du premier degré seulement, par rapport à chacune des quantités α, β, γ, etc. u, u_1, u_2, etc. et que u' doit être exprimé en x', de manière qu'en y faisant successivement $x' = x$, $x' = x_1$, $x' = x_2$, etc. il vienne $u' = u$, $u' = u_1$, $u' = u_2$, on peut écrire

$$u' = Xu + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \text{etc.}$$

pourvu que X, X_1, X_2, etc. soient des fonctions telles que par la supposition de $x' = x$, on ait en même temps

$$X = 1, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \text{ etc.}$$

que par celle de $x' = x_1$, on ait

$$X = 0, \quad X_1 = 1, \quad X_2 = 0, \text{ etc.}$$

que par celle de $x' = x$, on ait

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 1, \text{ etc.}$$

et ainsi de suite, conditions qui seront remplies si l'on prend

$X =$

$$X=\frac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}$$

$$X_1=\frac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots}$$

$$X_2=\frac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots}$$

La loi qu'il faut observer dans la formation de ces quantités est on ne peut pas plus simple ; leur numérateur contient, ainsi que leur dénominateur, autant de facteurs qu'il y a de quantités x, x_1, x_2, etc. moins une ; et si l'on y fait les hypothèses indiquées ci-dessus, non-seulement on se convaincra qu'elles satisfont à la question proposée, mais on verra de plus comment il a été possible de prévoir qu'elles y satisferaient : on a donc cette nouvelle formule d'interpolation,

$$\left.\begin{aligned} u' = {} & \frac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}u \\ & + \frac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots}u_1 \\ & + \frac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots}u_2 + \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

très-commode dans la pratique, parcequ'on en peut calculer chaque terme par le moyen des logarithmes. Il ne serait pas difficile de la ramener à celle du n° précédent, et même à celle du n° 349 ; c'est pourquoi je ne m'y arrèterai pas.

354. Quoique le but de l'interpolation soit en général de déterminer des valeurs intermédiaires entre des quantités observées, sans connaître la loi qui lie ces quantités à leurs indices, ou à la variable dont elles dé-

pendent, on l'emploie aussi lorsque cette loi est connue et exprimée analytiquement, mais que les calculs nécessaires pour évaluer en nombres les formules qui en résultent, sont très-compliqués. On se contente alors de déterminer par ces formules, de distance en distance, des résultats rigoureux, entre lesquels on interpole ensuite les valeurs intermédiaires qui doivent compléter la série qu'on se propose de former. Dans ce cas on ne prend point les différences successives des valeurs calculées, mais on déduit ces différences de l'expression analytique de la fonction proposée, et on en pousse la suite jusqu'à ce qu'il s'en trouve d'assez petites pour qu'on puisse les négliger. On calcule par leur moyen les valeurs successives de la fonction, dans l'intervalle compris entre celles qu'on a déterminées d'abord. Quoique la formation de ces valeurs soit facile à déduire des relations obtenues dans le n° 342, néanmoins, pour plus de clarté j'en rapporterai ici le tableau, en tenant compte des différences troisièmes que je supposerai constantes, ce qui donnera

$u_1 = u + \Delta u$		
$u_2 = u_1 + \Delta u_1$	$\Delta u_1 = \Delta u + \Delta^2 u$	
$u_3 = u_2 + \Delta u_2$	$\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1$	$\Delta^2 u_1 = \Delta^2 u + \Delta^3 u$
$u_4 = u_3 + \Delta u_3$	$\Delta u_3 = \Delta u_2 + \Delta^2 u_2$	$\Delta^2 u_2 = \Delta^2 u_1 + \Delta^3 u$
etc.	etc.	etc.

On voit par ce tableau qu'il faut calculer d'abord sur chaque ligne, la différence placée dans la colonne la plus à droite. Pour obtenir u_4, par exemple, on forme $\Delta^2 u_2$, en ajoutant à la valeur de $\Delta^2 u_1$ celle de $\Delta^3 u$, qui est regardée comme constante; ajoutant ensuite $\Delta^2 u_2$ avec Δu_2, qu'on suppose déjà connue, on parviendra à Δu_3, qu'il faudra joindre avec u_3 pour avoir u_4.

Pour éclaircir cet usage du Calcul des différences, je vais considérer les fonctions logarithmiques qui sont celles dont les tables servent le plus fréquemment.

355. Soit $u = lx$; on aura, par la formule du n° 29,

$$\Delta u = M\left\{\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \text{etc.}\right\}$$

$$\Delta^2 u = -M\left\{\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \text{etc.}\right\}$$

$$\Delta^3 u = M\left\{\frac{2h^3}{x^3} - \text{etc.}\right\}$$

etc.

On poussera ces suites, selon la grandeur du nombre x, jusqu'à ce que la dernière différence soit assez petite pour être négligée sans erreur sensible. Si l'on avait, par exemple, $x = 10000$, et $h = 1$, on trouverait pour les logarithmes ordinaires,

$\Delta u =$ 0,00004 34272 76863
$\Delta^2 u = -$ 0,00000 00043 42077
$\Delta^3 u =$ 0,00000 00000 00867;

et il est évident que si l'on ne voulait avoir les derniers résultats qu'avec dix chiffres seulement, on pourrait, sans craindre d'erreur sensible, négliger $\Delta^4 u$, ou regarder $\Delta^3 u$ comme constante.

Cela posé, le signe de $\Delta^2 u$, étant contraire à celui de $\Delta^3 u$, la différence de leurs valeurs donnera celle de $\Delta^2 u_1$; et on formera chacune des différences secondes successives $\Delta^2 u_1$, $\Delta^2 u_2$, $\Delta^2 u_3$, etc. en retranchant de la précédente la valeur de $\Delta^3 u$. De même Δu_1 s'obtiendra en ôtant la valeur de $\Delta^2 u$ de celle de

Δu; et chacune des différences premières successives Δu_1, Δu_2, Δu_3, se formera en ôtant de la précédente la valeur de la différence seconde qui s'y rapporte. Enfin au logarithme de 10000 qui est 4 00000 00000 00000, on ajoutera Δu pour obtenir le logarithme de 10001, à celui-ci Δu_1 pour avoir celui de 10002, à celui-ci Δu_2 pour avoir celui de 10003, etc. On peut former ainsi, par de simples soustractions et additions, les logarithmes de tous les nombres entiers consécutifs à 10000, tant que la somme des différences qu'on néglige à chaque opération n'est pas assez considérable pour influer sur le dernier chiffre décimal auquel on veut borner l'exactitude de la table; et c'est ce qu'on reconnaît au moyen de quelques logarithmes calculés rigoureusement à des intervalles éloignés; car lorsque par la suite des additions successives, on parvient à ces logarithmes, il faut que la méthode des différences les donne tels qu'ils ont été déduits *à priori*, au moins dans les dix premiers chiffres, si c'est à ce nombre que l'on veut s'arrêter. On irait, par ce qui précède, jusqu'à 10100, sans trouver d'erreur sur la dixième décimale; parvenu à ce but, on calculerait de nouveau *à priori* les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, et on se servirait de ces derniers résultats comme des précédens, pour obtenir les logarithmes des nombres entiers qui suivent 10100.

Du Calcul inverse des différences, par rapport aux fonctions explicites d'une seule variable.

356. Le Calcul inverse des différences est, à l'égard du Calcul direct, ce qu'est le Calcul intégral, par rapport au Calcul différentiel : il a pour objet de remonter des différences aux fonctions primitives. Je

m'occuperai d'abord du cas où les différences sont données explicitement par la variable indépendante, c'est-à-dire, où l'on a, pour déterminer la fonction u, une équation de cette forme $\Delta^n u = \mathrm{f}(x, h)$, h étant la différence de la variable indépendante x.

Soit premièrement $n = 1$, ou $\Delta u = \mathrm{f}(x, h)$. Cette équation ne fait connaître que le changement qu'éprouve la fonction u, lorsque x devient $x + h$, et ne détermine pas la valeur absolue de cette fonction; mais si l'on suppose que quand $x = a$, on ait $u = b$, il sera facile de former, en partant de ces données, toutes les valeurs de u; car aux indices

$$a, \qquad a + h, \qquad a + 2h, \qquad a + 3h, \text{ etc.}$$

correspondront ces valeurs de u:

$$b, \quad b + \mathrm{f}(a, h), \quad b + \mathrm{f}(a, h) + \mathrm{f}(a + h, h),$$
$$b + \mathrm{f}(a, h) + \mathrm{f}(a + h, h) + \mathrm{f}(a + 2h, h), \text{ etc.}$$

L'introduction de la quantité arbitraire b a lieu ici comme dans le Calcul intégral, pour remplacer la constante que la différentiation fait disparaître (344); mais on voit que la signification de l'équation $\Delta u = \mathrm{f}(x, h)$ repose dans le cas actuel sur la valeur assignée à l'accroissement h, et qu'on ne tire de cette équation qu'une suite de valeurs discontinues qui se succèdent d'après une loi donnée.

Si l'on avait $\Delta^2 u = \mathrm{f}(x, h)$, on ne pourrait tirer parti de cette équation, qu'en se donnant une première valeur de u avec celle de Δu qui lui correspond, ou deux valeurs consécutives de u. En effet, si lorsque $x = a$, on posait $u = b$, et $\Delta u = c$, on aurait, par le tableau du n° 354, pour les indices

$a, a+h, a+2h,$ $a+3h,$ etc.

cette suite de valeurs

$$b, b+c, b+2c+f(a,h), b+3c+2f(a,h)+f(a+h,h), \text{etc.}$$

Les différences de l'équation $\Delta^2 u = f(x,h)$ donnant successivement $\Delta^3 u$, $\Delta^4 u$, etc. on peut aussi s'elever immediatement à u_n, par la formule

$$u_n = u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u \ldots + \Delta^n u,$$

dans laquelle on voit évidemment que les deux premiers termes u et $n\Delta u$ demeurent arbitraires. Il est facile maintenant d'étendre ces considérations à tel ordre qu'on voudra.

Ceci ne mène encore qu'à une suite de valeurs discontinues, dont il faudrait trouver le terme général pour obtenir une expression analytiqne de la fonction primitive cherchée.

357. On donne aussi à la fonction primitive le nom d'*intégrale* : u est l'intégrale de Δu.

Pour désigner une intégrale quelconque de ce genre, on se sert de la caractéristique Σ : l'intégrale de $f(x,h)$ serait indiquée par $\Sigma f(x,h)$; et on doit bien se rappeler que cette intégrale est la fonction qui s'accroît de la quantité $f(x,h)$, lorsque x se change en $x+h$. Quand il faut distinguer ces intégrales de celles des différentielles, on emploie la dénomination d'*intégrale aux différences*.

358. Les règles pour l'intégration des différences sont en très-petit nombre, et malheureusement les cas où l'on peut s'en servir avec succès sont très-bornés. Il suit de la formation des différences, 1°. que

$$\Delta(X+Y-Z) = \Delta X + \Delta Y - \Delta Z;$$

et en remontant aux fonctions primitives, on a

$$\Sigma(\Delta X + \Delta Y - \Delta Z) = X + Y - Z = \Sigma \Delta X + \Sigma \Delta Y - \Sigma \Delta Z,$$

ce qui ramène l'intégration des différences polynomes à celle des monomes :

2°. Que $\Delta . aX = a\Delta X$, d'où $\Sigma . a \Delta X = aX = a\Sigma \Delta X$, ce qui prouve qu'on peut à volonté faire sortir du signe Σ, ou introduire sous ce signe un facteur constant.

3°. Lorsque $u = x^{m+1}$ et que m est un nombre entier, il vient

$$\Delta u = \frac{(m+1)}{1} x^m h + \frac{(m+1)m}{1.2} x^{m-1} h^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2} h^3$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4} x^{m-3} h^4 \ldots + h^{m+1} x^0.$$

En intégrant terme à terme chaque membre de cette équation, remettant dans le premier x^{m+1}, au lieu de u, et passant hors du signe Σ les facteurs constans, on obtiendra

$$x^{m+1} = \frac{m+1}{1} h \Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{1.2} h^2 \Sigma x^{m-1}$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} h^3 \Sigma x^{m-2} \ldots + h^{m+1} \Sigma x^0.$$

Cette équation ferait connaître l'intégrale Σx^m, si l'on avait Σx^{m-1}, $\Sigma x^{m-2}, \ldots \Sigma x^0$, puisqu'on en tirerait

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} -$$
$$\left\{ \frac{m}{1.2} h \Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} h^2 \Sigma x^{m-2} \ldots + \frac{1}{m+1} h^m \Sigma x^0 \right\}$$

Si l'on écrit successivement dans cette dernière $m-1$, $m-2$, $m-3$, etc. pour m, on formera des expressions de Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, Σx^{m-3}, etc. qui ne dépendront que des intégrales des puissances de x qui leur sont respectivement inférieures. On peut aussi former ces valeurs en remontant ; et si l'on prend d'abord $m=0$, il vient $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$, parceque la formule générale ne doit renfermer qu'un nombre m de termes affectés du signe Σ. Cette conclusion se vérifie d'ailleurs *à priori*, soit en observant que de $u=x$, il résulte $\Delta x = h.x^0, x = h\Sigma x^0$, et parconséquent $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$, soit en prenant la différence de la fonction primitive $\frac{x}{h}$, pour laquelle on trouve

$$\frac{x+h}{h} - \frac{x}{h} = 1 = x^0.$$

Faisant ensuite $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc. et substituant successivement pour Σx^0, Σx^1, Σx^2, etc. les valeurs auxquelles on parviendra, on formera cette table :

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}xh$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}\frac{x^4}{h} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2h$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}\frac{x^5}{h} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3h - \frac{1}{5.6}xh^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}\frac{x^6}{h} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4h - \frac{1}{2.6}x^2h^3$$

etc.

Au lieu de pousser plus loin cette induction, on peut supposer en général

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \text{etc.}$$

en prenant la différence première de chaque membre, on trouvera

$$\begin{aligned} x^m = {} & A\frac{(m+1)}{1}x^m h \\ & + A\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2 + A\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3 + \text{etc.} \\ & + \quad B\frac{m}{1} \quad x^{m-1}h + \quad B\frac{m(m-1)}{1.2} \quad x^{m-2}h^2 + \text{etc.} \\ & \qquad\qquad + \quad C\frac{(m-1)}{1} \quad x^{m-2}h + \text{etc.} \\ & \qquad\qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

et comparant entr'eux les termes affectés d'une même puissance de x, on obtiendra entre les coefficiens A, B, C, D, etc. les relations suivantes

$$A = \frac{1}{(m+1)h}$$

$$B = -A\frac{(m+1)h}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$C = -A\frac{(m+1)mh^2}{2.3} - B\frac{mh}{2}$$

$$D = -A\frac{(m+1)m(m-1)h^3}{2.3.4} - B\frac{m(m-1)h^2}{2.3} - C\frac{(m-1)}{2}h$$

etc.

avec lesquelles on déduira facilement les uns des autres les coefficiens de l'expression de Σx^m, quel que soit l'exposant m. En calculant immédiatement les douze

premiers termes, on trouvera

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{1}{2} x^m$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{mh}{2.3} x^{m-1} - \frac{1}{6}\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2.3.4.5} x^{m-3}$$
$$+ \frac{1}{6} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5}{2.3.4.5.6.7} x^{m-5}$$
$$- \frac{3}{10} \frac{m(m-1)\ldots(m-6)h^7}{2.3\ldots\ldots8.9} x^{m-7}$$
$$+ \frac{5}{6} \frac{m(m-1)\ldots(m-8)h^9}{2.3\ldots\ldots10.11} x^{m-9}$$
$$- \frac{691}{210} \frac{m(m-1)\ldots(m-10)h^{11}}{2.3\ldots\ldots12.13} x^{m-11}$$
$$+ \frac{35}{2} \frac{m(m-1)\ldots(m-12)h^{13}}{2.3\ldots\ldots14.15} x^{m-13}$$
$$- \frac{3617}{30} \frac{m(m-1)\ldots(m-14)h^{15}}{2.3\ldots\ldots16.17} x^{m-15}$$
$$+ \frac{43867}{42} \frac{m(m-1)\ldots(m-16)h^{17}}{2.3\ldots\ldots18.19} x^{m-17}$$
$$- \frac{1222277}{110} \frac{m(m-1)\ldots(m-18)h^{19}}{2.3\ldots\ldots20.21} x^{m-19}$$
$$\text{etc.} \qquad + \textit{const.}$$

formule dans laquelle les coefficiens exprimés en nombres méritent attention, parcequ'ils reviennent souvent dans la Théorie des suites.

Je ferai observer, avant de finir cet article, que si l'on multiplie Σx^m par h, et qu'on passe cet accroissement sous le signe Σ, on aura cette équation

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} x^m h + \frac{1}{2}\frac{mh^2}{2.3} x^{m-1} - \text{etc.} + \textit{const.}$$

dont le second membre a pour limite $\frac{x^{m+1}}{m+1}+const.$ lorsque h s'évanouit, cas auquel $\Sigma x^m h$ se change en $\int x^m dx$, d'après ce qu'on a vu dans le n° 211.

359. Ce qui précède fournit le moyen d'intégrer toutes les fonctions algébriques, rationnelles et entières, dans le cas où la variable indépendante reçoit un accroissement constant. Je prends pour exemple la fonction

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D;$$

et comme

$$\Sigma(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=A\Sigma x^3+B\Sigma x^2+C\Sigma x+D\Sigma x^0,$$

en mettant pour Σx^3, Σx^2, Σx et Σx^0, leurs valeurs, on trouvera

$$\Sigma(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=$$
$$\frac{A}{4h}x^4-\frac{3Ah-2B}{6h}x^3+\frac{Ah^2-2Bh+2C}{4h}x^2$$
$$+\frac{Bh^2-3Ch+6D}{6h}x+const.$$

360. Il existe un genre de fonctions rationnelles qui s'intègrent avec la plus grande facilité : ce sont les produits de la forme

$$u=x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h).$$

En effet, si on en prend la différence, on obtiendra

$$\begin{aligned}\Delta u&=(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+mh)\\&\quad-x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\ldots(x+(m-1)h)\\&=(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\ldots\ldots(x+(m-1)h)mh\end{aligned}$$

et comme $\Sigma\frac{\Delta u}{mh}=\frac{\Sigma\Delta u}{mh}=\frac{u}{mh}$, on aura

$$\Sigma(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+(m-1)h)$$
$$=\frac{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+(m-1)h)}{mh}+\text{const.}$$

Si l'on écrit maintenant $x-h$ au lieu de x, et $m+1$ au lieu de m, il viendra

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+(m-1)h)$$
$$=\frac{(x-h)x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+(m-1)h)}{(m+1)h}.$$

On voit ici que dans l'intégrale le nombre des facteurs surpasse de l'unité celui des facteurs de la différence, et que le diviseur est $m+1$, ce qui est bien analogue à la formule $\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

On intègre aussi la fraction

$$u=\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+(m-1)h)},$$

parcequ'en la différentiant on trouve

$$\Delta u=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots\ldots(x+mh)}\\ -\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+(m-1)h)}\end{array}\right.$$
$$=\frac{-mh}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+mh)};$$

repassant aux intégrales, il vient en mettant pour u sa valeur

$$\Sigma\frac{-1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+mh)}=\frac{u}{mh}$$
$$=\frac{-1}{mhx(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+(m-1)h)};$$

et si on écrit $m-1$ au lieu de m pour ramener à m le nombre des facteurs du dénominateur de la quantité affectée du signe Σ, on obtiendra

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)}$$
$$= \frac{-1}{(m-1)hx(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+(m-2)h)}.$$

361. Les formules ci-dessus peuvent servir aussi à l'intégration des fonctions de la forme

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\zeta} + Cx^{\gamma} + \text{etc.},$$

parce que ces fonctions se transforment en produits de facteurs dont les différences sont constantes. Pour le faire voir, je choisis cet exemple très-simple : x^3, et je fais

$$x^3 = (x+h)(x+2h)(x+3h)$$
$$+A(x+h)(x+2h)+B(x+h)+C,$$

en supposant que h désigne l'accroissement de x. Si l'on développe, et qu'on ordonne suivant les puissances de x, on aura

$$\begin{aligned} x^3 = x^3 &+ 6hx^2 + 11h^2x + 6h^3 \\ &+ Ax^2 + 3Ahx + 2Ah^2 \\ &\qquad\quad + Bx \;\; + Bh \\ &\qquad\qquad\qquad + C; \end{aligned}$$

et comparant entr'eux les termes affectés de la même puissance de x, on formera les équations

$$6h + A = 0,$$
$$11h^2 + 3Ah + B = 0,$$
$$6h^3 + 2Ah^2 + Bh + C = 0,$$

desquelles on tirera

$$A = -6h, \quad B = 7h^2, \quad C = -h^3,$$

et

$$x^3 = (x+h)(x+2h)(x+3h) - 6h(x+h)(x+2h) + 7h^2(x+h) - h^3,$$

ce qui donnera, en vertu du n° précédent,

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4h} x(x+h)(x+2h)(x+3h) - 2x(x+h)(x+2h) + \frac{7}{2} hx(x+h) - h^2 x + const.$$

362. A l'égard de l'intégration des fonctions transcendantes, je me bornerai aux fonctions exponentielles et circulaires. On a pour les premières

$$\Delta . a^x = a^x (a^h - 1),$$

d'où il résulte

$$a^x = \Sigma a^x (a^h - 1)$$

et

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1}.$$

363. Pour les fonctions circulaires, on a 1°. l'équation

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \tfrac{1}{2}(A - B) \sin \tfrac{1}{2}(A + B),$$

qui donne

$$\Delta \cos x = \cos(x+h) - \cos x = -2 \sin \tfrac{1}{2} h \sin(x + \tfrac{1}{2} h),$$

d'où on tire

$$\sin(x+\tfrac{1}{2}h)=-\frac{\Delta\cos x}{2\sin\frac{1}{2}h},\ \text{et}\ \sin x=-\frac{\Delta\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h},$$

en écrivant $x-\frac{1}{2}h$, au lieu de x; prenant ensuite l'intégrale de chaque membre de la dernière équation, on obtient

$$\Sigma\sin x=-\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}+\textit{const.}$$

2°. L'équation

$$\sin A-\sin B=2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B),$$

donne

$$\Delta\sin x=\sin(x+h)-\sin x=2\sin\tfrac{1}{2}h\cos(x+\tfrac{1}{2}h),$$

d'où il suit

$$\cos(x+\tfrac{1}{2}h)=\frac{\Delta\sin x}{2\sin\frac{1}{2}h},\quad \cos x=\frac{\Delta\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h},$$

$$\Sigma\cos x=\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}+\textit{const.}$$

3°. La conversion des puissances de sinus, de cosinus et de leurs produits, en fonction de sinus et de cosinus d'arcs multiples, ramènera aux deux formules précédentes, l'intégration de la fonction générale $\sin x^m\cos x^n$, lorsque les exposans m et n seront des nombres entiers positifs.

En effet, cette fonction sera changée en une suite de termes de la forme $A\sin qx$, ou $A\cos qx$, dont les intégrales se déduiront de celles de $A\sin x$ et $A\cos x$ en écrivant qx et qh, au lieu de x et de h; et il est facile de voir que l'on aura en général

$$\Sigma \sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.$$

$$\Sigma \cos(p+qx) = \frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.$$

364. L'utilité dont est l'expression de Σu, pour la sommation des séries, a porté les Analystes à s'en occuper beaucoup, et ils sont parvenus à lui donner plusieurs formes très-élégantes. Euler la fit dépendre des coefficiens différentiels et de l'intégrale $\int u dx$. On arrive à ce résultat en partant de la formule

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui donne

$$z = \frac{h}{1}\Sigma\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.}$$

Si on fait $\frac{dz}{dx} = u$, il viendra $z = \int u dx$ et

$$\int u dx = h\Sigma u + \alpha h^2 \Sigma\frac{du}{dx} + \beta h^3 \Sigma\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.}$$

en représentant par α, β, γ, etc. les coefficiens numériques ; on tirera de là

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u dx - \alpha h \Sigma\frac{du}{dx} - \beta h^2 \Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \text{etc.}$$

Si maintenant on prend les coefficiens différentiels de chaque membre, en observant que $\frac{d.\Sigma u}{dx} = \Sigma\frac{du}{dx}$, ce qu'il est fort aisé de vérifier, on obtiendra cette suite d'équations ;

$$\Sigma\frac{du}{dx}=\frac{1}{h}u-\alpha h\Sigma\frac{d^2u}{dx^2}-\beta h^2\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}-\text{etc.}$$

$$\Sigma\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{h}\frac{du}{dx}-\alpha h\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}-\beta h^2\Sigma\frac{d^4u}{dx^4}-\text{etc.}$$

$$\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{1}{h}\frac{d^2u}{dx^2}-\alpha h\Sigma\frac{d^4u}{dx^4}-\beta h^2\Sigma\frac{d^5u}{dx^5}-\text{etc.}$$

etc.

on se servira de ces dernières pour éliminer successivement de la valeur de Σu, les fonctions

$$\Sigma\frac{du}{dx},\quad \Sigma\frac{d^2u}{dx^2},\quad \Sigma\frac{d^3u}{dx^3},\ \text{etc.}$$

et il est aisé de voir que le résultat sera nécessairement de la forme

$$\Sigma u=\frac{1}{h}\int u\mathrm{d}x+Au+Bh\frac{du}{dx}+Ch^2\frac{d^2u}{dx^2}+\text{etc.}$$

La détermination des coefficiens A, B, C, etc. s'opère ici comme dans le n° 347, par la considération de la fonction particulière e^x, pour laquelle on trouve

$$\Sigma e^x=\frac{e^x}{e^h-1},\quad \int e^x\mathrm{d}x=e^x,\quad \frac{d^m.e^x}{dx^m}=e^x,$$

d'où il suit

$$\frac{1}{e^h-1}=\frac{1}{h}+A+Bh+Ch^2+\text{etc.}$$

ce qui montre que les coefficiens A, B, C, etc. ne sont autre chose que ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de la fonction $\frac{1}{e^h-1}$, réduite en rie ascendante p ar rapport à cette lettre.

365. On obtiendra de la même manière, et sans plus de difficulté, les intégrales $\Sigma\Sigma u$, ou $\Sigma^2 u$, $\Sigma\Sigma^2 u$, ou $\Sigma^3 u$, en général $\Sigma^m u$; car la formule

$$\Delta^m z = \frac{d^m z}{dx^m} h^m + \alpha \frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}} h^{m+1} + \beta \frac{d^{m+2} z}{dx^{m+2}} h^{m+2} + \text{etc.}$$

conduit à

$$z = h^m \Sigma^m \frac{d^m z}{dx^m} + \alpha h^{m+1} \Sigma^m \frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}} + \beta h^{m+2} \Sigma^m \frac{d^{m+2} z}{dx^{m+2}} + \text{etc.}$$

faisant ensuite $\frac{d^m z}{dx^m} = u$, on aura $z = \int^m u dx^m$, et par-conséquent

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m} \int^m u dx^m - \alpha h \Sigma^m \frac{du}{dx} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{d^2 u}{dx^2} - \text{etc.}$$

prenant les coefficiens différentiels de chaque membre de cette dernière équation, on formera les suivantes:

$$\Sigma^m \frac{du}{dx} = \frac{1}{h^m} \int^{m-1} u dx^{m-1} - \alpha h \Sigma^m \frac{d^2 u}{dx^2} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{d^3 u}{dx^3} - \text{etc.}$$

$$\Sigma^m \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{h^m} \int^{m-2} u dx^{m-2} - \alpha h \Sigma^m \frac{d^3 u}{dx^3} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{d^4 u}{dx^4} - \text{etc.}$$

etc.

à l'aide desquelles on chassera $\Sigma^m \frac{du}{dx}$, $\Sigma^m \frac{d^2 u}{dx^2}$, etc. de l'expression de $\Sigma^m u$. L'équation finale pourra être représentée par

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m} \int^m u dx^m + \frac{A}{h^{m-1}} \int^{m-1} u dx^{m-1}$$
$$+ \frac{B}{h^{m-2}} \int^{m-2} u dx^{m-2} \dots + \frac{M}{h} \int u dx$$
$$+ Nu + Ph \frac{du}{dx} + Qh^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \text{etc.}$$

et lorsqu'on fera $u = e^x$, elle deviendra

$$\frac{1}{(e^h-1)^m} = \frac{1}{h^m} + \frac{A}{h^{m-1}} + \frac{B}{h^{m-2}} \ldots\ldots + \frac{M}{h}$$
$$+ N + Ph + Qh^2 + \text{etc.}$$

les coefficiens A, B, ...M, N, etc. sont donc encore ici ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de $\frac{1}{(e^h-1)^m}$; et de là résulte, entre les intégrales et les puissances négatives, une analogie qui n'est que la continuation de celle que les différences ont avec les puissances positives : ensorte que l'on doit regarder les intégrales comme les différences d'un ordre dont l'exposant est négatif. Il est visible, en effet, que d'après ce qu'on vient de voir, on peut écrire

$$\Sigma^m u = \frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^m},$$

pourvu qu'après le développement on change les puissances positives $\frac{du^p}{dx^p}$ en $\frac{d^p u}{dx^p}$, et les puissances négatives $\frac{du^{-p}}{dx^{-p}}$ en $\int^p u dx^p$; et puisque l'on a (347),

$$\Delta^m u = \left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^m,$$

il est évident que l'expression de $\Sigma^m u$ est comprise dans celle de $\Delta^m u$, dont elle se déduit en affectant l'exposant m du signe $-$.

366. L'intégration par parties se pratique sur les

différences aussi bien que sur les différentielles. Soient P et Q deux fonctions quelconques de x : on fera

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P + z,$$

z étant une fonction inconnue de la même variable; et prenant la différence de chaque membre de cette équation, on aura

$$PQ = (Q + \Delta Q)\Sigma(P + \Delta P) - Q\Sigma P + \Delta z;$$

développant et réduisant, en observant $Q\Sigma\Delta P = PQ$, il viendra

$$o\Delta = Q\Sigma(P + \Delta P) + \Delta z, \text{ ou } \Delta z = -\Delta Q\Sigma(P + \Delta P),$$

et parconséquent

$$z = -\Sigma\Delta Q\Sigma(P + \Delta P),$$

puis

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma(P + \Delta P) \ldots\ldots (A),$$

formule qui devient

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma P_1 \qquad (1)$$

lorsqu'on écrit P_1 pour $P + \Delta P$.

Si dans la formule (A) on change Q en ΔQ, P en ΣP_1, et qu'on observe que

$$\Sigma P_1 + \Delta\Sigma P_1 = \Sigma(P_1 + \Delta P_1) = \Sigma P_2,$$

on en déduira

$$\Sigma\Delta Q\Sigma P_1 = \Delta Q\Sigma^2 P_1 - \Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2;$$

et la formule (1) deviendra

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2. \qquad (2)$$

Changeant ensuite dans l'équation (A) Q en $\Delta^2 Q$, ΣP_1 en $\Sigma^2 P_2$, et remarquant que

$$\Sigma^2 P_2 + \Delta \Sigma^2 P_2 = \Sigma^2 P_3,$$

on trouvera

$$\Sigma \Delta^2 Q \Sigma^2 P_2 = \Delta^2 Q \Sigma^3 P_2 - \Sigma \Delta^3 Q \Sigma^3 P_3,$$

et la formule (2) deviendra

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q \Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q \Sigma^3 P_2 - \Sigma \Delta^3 Q \Sigma^3 P_3,$$

qui montre la loi de cette expression élégante, donnée pour la première fois par Taylor, dans les Transactions philosophiques :

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q \Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q \Sigma^3 P_2$$
$$- \Delta^3 Q \Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q \Sigma^5 P_4 - \text{etc.}$$

Si l'on y met pour P_1, P_2, P_3, etc. leurs valeurs en P, et qu'on effectue les intégrations qui deviennent possibles, elle se change en

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P)$$
$$- \Delta^3 Q(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{etc.}$$

C'est sous cette forme que Condorcet l'a présentée dans son *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions*, p. 163.

Elle s'arrête toutes les fois que la fonction Q mène à des différences constantes dans un ordre quelconque ; et si la fonction P est susceptible d'un nombre suffisant d'intégrations successives, on parvient à l'intégrale exacte de la fonction PQ.

Application du calcul des différences à la sommation des suites.

367. Dans une suite quelconque

$$u, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n,$$

le terme général u_n peut être regardé comme la différence de la fonction qui exprime la somme des termes qui le précèdent; ensorte que si on fait

$$u + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} = S_{n-1},$$

on aura

$$\Delta S_{n-1} = u_n \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \Sigma u_n \ (357).$$

Il suit de là que la somme entière, en y comprenant le terme général, sera

$$S_n = \Sigma u_n + u_n.$$

On voit aussi que S_n résultant de S_{n-1} par le changement de n en $n+1$, l'expression de S_n peut se déduire de la même manière de celle de Σu_n.

Si donc $f(x, h)$ désigne le terme général d'une série quelconque, dans laquelle la différence de la variable indépendante soit h, la somme de cette série, que je représenterai par $Sf(x, h)$, sera

$$Sf(x, h) = \Sigma f(x, h) + f(x, h),$$

ou bien s'obtiendra en mettant $x+h$ au lieu de x, dans $\Sigma f(x, h)$.

On trouvera, d'après cela, Sx^m, en mettant $x+h$ au lieu de x dans l'expression de Σx^m (358).

Si l'on développe en particulier Sx^2, et qu'on fasse $h=1$, il viendra après les réductions,

$$Sx^2 = \frac{2x^3+3x^2+x}{6} + const.$$

Par le même procédé, on déduira des formules du n° 361,

$$Sx(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h) = \frac{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}{m+1} + const.,$$

$$S\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)} = \frac{1}{(m+1)h(x+h)(x+2h)\ldots(x+(m-1)h)} + const.$$

En faisant successivement $m=1$, $m=2$, etc., et prenant $h=1$ dans le premier de ces deux résultats, on formera les sommes des séries de *nombres figurés* (*Comp. des Elém. d'Alg.*), savoir,

$$Sx = \frac{x(x+1)}{2} + const.$$

$$S\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)(x+2)}{2.3} + const.$$

$$S\frac{x(x+1)(x+2)}{2.3} = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{2.3.4} + const.$$

etc.

On conclura des numéros 362, 363, que

$$Sa^x = \frac{a^{x+h}}{a^h-1} + const.$$

$$S\sin x = -\frac{\cos(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + const.$$

$$S\cos x = \frac{\sin(x+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + const.$$

Enfin l'expression générale de Σu du n° 364, donne une formule générale pour Su.

Les constantes ajoutées dans les intégrales aux différences et dans les sommes, se déterminent comme celles des intégrales relatives aux différentielles ; mais il est plus commode de prendre ces intégrales ou ces sommes, entre des limites données, comme dans le n° 209.

En faisant commencer les séries des nombres figurés à l'indice $x=0$, on trouvera que leurs sommes respectives sont les expressions rapportées ci-dessus, débarrassées de la constante.

Pour obtenir, par exemple, la somme de la série

$$\sin a, \quad \sin(a+h)\ldots\sin(a+nh),$$

il faudra prendre $S\sin x$, depuis $x=a-h$, jusqu'à $x=a+nh$, et il viendra

$$\frac{\cos(a-\frac{1}{2}h)-\cos(a+nh+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}=\frac{\sin(a+\frac{1}{2}nh)\sin\frac{1}{2}(n+1)h}{\sin\frac{1}{2}h}$$

De l'intégration des équations aux différences, à deux variables.

368. Jusqu'ici j'ai supposé que la différence de la fonction cherchée était donnée explicitement par la variable indépendante ; je vais maintenant m'occuper des cas où l'on a seulement une équation contenant la fonction cherchée, ses différences, la variable indépendante et ses accroissemens. Si la fonction cherchée y dépend de la variable x, dont l'accroissement, considéré comme constant, est désigné à l'ordinaire par h, l'équation pro-

posée sera comprise dans la formule générale

$$F(x,\ h,\ y,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \text{etc.}) = 0.$$

Il est à propos d'observer que l'on peut en faire disparaître les différences Δy, $\Delta^2 y$, etc., en les remplaçant par les valeurs consécutives de y, puisqu'on a

$$\Delta y = y_1 - y,\quad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y,\ \text{etc. (342);}$$

et le résultat prendra la forme

$$F(x,\ h,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \text{etc.}) = 0,$$

dans laquelle on voit que toute équation aux différences fait connaître la valeur de la fonction cherchée, par le moyen d'un certain nombre de valeurs antécédentes.

Si l'équation était du premier ordre, par exemple, on aurait y_1, par le moyen de y; si elle était du second, on en tirerait y_2, exprimé par y_1 et par y, et ainsi de suite.

Il est facile de s'appercevoir qu'une équation quelconque aux différences, équivaut à une série, dans laquelle on obtient chaque terme par le moyen de sa relation avec ceux qui le précèdent et avec l'indice qui marque le rang qu'il occupe. En effet, lorsqu'on a, par exemple, $y_2 = f(x,\ h,\ y,\ y_1)$, on en déduit

$$y_3 = f(x+h,\ h,\ y_1,\ y_2),\quad y_4 = f(x+2h,\ h,\ y_2,\ y_3),\ \text{etc.}$$

et l'on forme ainsi la série

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \text{etc.}$$

au moyen de ses deux premiers termes.

Ce cas particulier suffit pour montrer que *dans la série résultante d'une équation quelconque aux différences, il y aura toujours autant de termes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de cette équation.*

369. On peut changer toute équation aux différences en une équation différentielle d'un ordre indéfini, en substituant, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc. leurs développemens d'après le n° 347, et il n'est pas moins évident que l'on convertirait aussi toute équation différentielle en une équation aux différences d'un ordre indéfini, en remplaçant les coefficiens différentiels, par leurs développemens tirés de la formule du n° 348.

Il ne paraît pas que ces transformations, qui ont l'inconvénient d'introduire un nombre infini de termes, puissent être, en général, fort utiles pour l'intégration des équations; mais elles sont très-propres à faire sentir la différence qui existe entre le Calcul différentiel et le Calcul aux différences. Elles prouvent que, par la nature de ce dernier, les différences de la variable indépendante doivent avoir nécessairement une valeur déterminée; car si l'on avait une équation entre

$$x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \text{etc.}$$

dans laquelle Δx demeurât indéterminé, qu'on la développât suivant les puissances de Δx, Δy, $\Delta^2 y$, etc. ce qui lui donnerait la forme

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x + B\Delta y \\ + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta^2 y \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

on y pourrait substituer, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc. leurs développemens, et comme $\Delta x y$ resterait encore in-

déterminé, il faudrait que les coefficiens des diverses puissances de cet accroissement s'évanouissent d'eux-mêmes. On obtiendrait ainsi, entre les variables x, y, et leurs différentielles, un nombre infini d'équations qui devraient s'accorder entr'elles pour que la proposée signifiât quelque chose; et dans ce cas elle ne serait équivalente qu'à la première de ces équations, dont les autres deviendraient les différentielles successives.

En ne supposant l'équation aux différences que du premier ordre, ce qui la réduit à

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{etc.} = 0,$$

et prenant

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

il vient

$$\left.\begin{matrix} B\dfrac{dy}{dx} \\ +A \end{matrix}\right\}\Delta x + \left.\begin{matrix} E\dfrac{dy^2}{dx^2} \\ +D\dfrac{dy}{dx} \\ +C \\ +\dfrac{B}{1.2}\dfrac{d^2y}{dx^2} \end{matrix}\right\}\Delta x^2 + \text{etc.} = 0,$$

d'où l'on tire

$$B\frac{dy}{dx} + A = 0, \quad E\frac{dy^2}{dx^2} + D\frac{dy}{dx} + C + \frac{B}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ etc.}$$

et si cette suite d'équations ne peut avoir lieu, la proposée ne pourra se vérifier qu'en assignant à Δx une valeur particulière.

370. Ces préliminaires posés, j'entre en matière par l'intégration de l'equation générale du premier degré et du premier ordre. Je suppose que la différence de la variable x, ou Δx, étant 1, on ait l'équation $\Delta y + Py = Q$, analogue à l'équation différentielle traitée dans le n° 257; un procédé semblable à celui du n° cité conduit à l'intégrale de la première.

Si on fait $y = uz$, il viendra

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z,$$

ce qui changera l'équation proposée en

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Puz = Q;$$

et posant séparément

$$z\Delta u + Puz = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta u + Pu = 0,$$

il restera $u\Delta z + \Delta u\Delta z = Q$, d'où l'on tirera

$$\Delta z = \frac{Q}{u + \Delta u} \quad \text{et} \quad z = \Sigma\frac{Q}{u + \Delta u}:$$

la question se réduit donc à intégrer l'équation

$$\Delta u + Pu = 0,$$

dans laquelle on peut séparer les variables, en lui donnant la forme $\frac{\Delta u}{u} = -P$, puisque P est supposé ne contenir que x. Soit $u = e^t$, il en résultera

$$\Delta u = e^t(e^{\Delta t} - 1) \text{ et } \frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -P,$$

d'où on tirera

$$e^{\Delta t} = 1 - P, \quad \Delta t = \mathrm{l}(1 - P) \quad \text{et} \quad t = \Sigma\mathrm{l}(1 - P).$$

Mais la somme des logarithmes de la fonction $1-P$, répondant au produit continuel des valeurs successives que reçoit $1-P$ entre les limites de l'intégrale, c'est-à-dire à

$$(1-P_{x-1})(1-P_{x-2})(1-P_{x-3})\ldots(1-P_0),$$

si on désigne ce produit par $[1-P_{x-1}]^{x}$, l'exposant x marquant le nombre des facteurs, on aura

$$t = \mathrm{l}\,[1-P_{x-1}]^{x},$$

d'où on conclura

$$u = e^{t} = [1-P_{x-1}]^{x};$$

et si l'on fait attention que $u+\Delta u = u_1$, on obtiendra

$$u+\Delta u = [1-P_x]^{x+1} \text{ et } z = \Sigma \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}},$$

ce qui donnera enfin

$$y = [1-P_{x-1}]^{x}\,\Sigma \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}};$$

la constante arbitraire étant comprise dans l'intégrale indiquée.

C'est à peu près ainsi que Lagrange, qui le premier fit voir l'analogie que les équations aux différences du premier degré, ont avec les équations différentielles du même degré, a intégré, en 1761, l'équation traitée ci-dessus ; il applique ensuite son résultat à l'équation $y_1 = Ry + Q$, qui revient à $y+\Delta y = Ry + Q$. En comparant cette dernière avec $\Delta y + Py = Q$, il vient

$P = 1 - R$, $1 - P = R$, et l'on a parconséquent

$$y = [R_{x-1}]^{x} \Sigma \frac{Q}{[R_x]^{x+1}}.$$

Quoique le développement du produit $[1 - P_{x-1}]^{x}$, semble supposer que la différence de x soit égale à l'unité, on peut néanmoins conserver l'expression précédente, lorsque $\Delta x = h$, en concevant qu'elle répond à

$$(1 - P_{x-h})\,(1 - P_{x-2h})\,(1 - P_{x-3h}) \text{ etc.}$$

ou bien transformer l'équation proposée en une autre, en faisant $x = hx'$, ce qui donnerait $\Delta x = h\Delta x'$ et $\Delta x' = 1$.

Lorsque le coefficient R est constant, on a

$$y = R^x \Sigma \frac{Q}{R^{x+1}};$$

et s'il en est de même de Q, l'intégration indiquée s'effectue facilement : on obtient dans ce cas

$$\Sigma \frac{Q}{R^{x+1}} = Q \Sigma R^{-x-1} = \frac{QR^{-x-1}}{R^{-1}-1} = \frac{Q}{R^x(1-R)} \quad (362),$$

et $$y = R^x \left\{ \frac{Q}{R^x(1-R)} + const. \right\}.$$

En général on obtiendra la valeur de y, délivrée du signe d'intégration toutes les fois que Q sera une fonction rationnelle et entière de x.

371. Dans les recherches citées n° précédent, Lagrange applique aux équations du premier degré et d'un ordre quelconque aux différences, la méthode

que d'Alembert a donnée pour les équations différen-rentielles du premier degré et dont j'ai fait connaître l'esprit, n° 306 ; mais il est revenu sur ce sujet en 1775, par une méthode encore plus simple, que je vais exposer.

Soit

$$y_{x+n}+P_x y_{x+n-1}+Q_x y_{x+n-2}\ldots+U_x y_x=V_x \quad (A),$$

une équation d'un ordre quelconque et du premier degré par rapport à la fonction y_x ; on prouve, comme dans le n° 284, que son intégration se ramène à celle de

$$z_{x+n}+P_x z_{x+n-1}+Q_x z_{x+n-2}\ldots+U_x z_x=0 \quad (B),$$

et que l'on obtient la valeur complète de z_x, lorsqu'on en connaît un nombre n de valeurs particulières.

La dernière de ces propositions est presqu'évidente par elle-même; car il est clair que si

$$z'_x, \quad z''_x, \quad z'''_x, \ldots$$

sont des fonctions de x, qui satisfassent à l'équation (B), l'expression

$$z=C'z'_x+C''z''_x+C'''z'''_x+\text{etc.}$$

y satisfera pareillement, sans détermination des constantes C', C'', C''', etc.; et quand le nombre de ses termes supposés absolument irréductibles entr'eux sera n, elle sera l'intégrale complète de cette équation, puisqu'elle renfermera n constantes arbitraires.

Cela posé, si l'on regarde ces constantes comme des fonctions de x, et que dans cette hypothèse on change z_x en y_x, ou que l'on fasse

$$y_x=C'_x z'_x+C''_x z''_x+C'''_x z'''_x+\text{etc.}$$

on en déduira d'abord

$$y_{x+1} = C'_{x+1} z'_{x+1} + C''_{x+1} z''_{x+1} + C'''_{x+1} z'''_{x+1} + \text{etc.}$$

résultat qui se transforme en

$$\begin{aligned} y_{x+1} = & C'_x z'_{x+1} + C''_x z''_{x+1} + C'''_x z'''_{x+1} + \text{etc.} \\ & + z'_{x+1} \Delta C'_x + z''_{x+1} \Delta C''_x + z'''_{x+1} \Delta C'''_x + \text{etc.} \end{aligned}$$

en mettant pour C'_{x+1}, C''_{x+1}, etc. leurs valeurs

$$C'_x + \Delta C'_x,\ C''_x + \Delta C''_x, \text{ etc.}$$

et se réduit à

$$y_{x+1} = C'_x z'_{x+1} + C''_x z''_{x+1} + C'''_x z'''_{x+1} + \text{etc.}]$$

lorsqu'on fait

$$z_{x+1} \Delta C'_x + z''_{x+1} \Delta C''_x + z'''_{x+1} \Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \ (1),$$

de même que si les quantités C'_x, C''_x C'''_x, etc. fussent demeurées constantes. En faisant de nouveau varier x, on obtiendra

$$\begin{aligned} y_{x+2} = & C'_{x+1} z'_{x+2} + C''_{x+1} z'_{x+2} + C'''_{x+1} z'''_{x+2} + \text{etc.} \\ = & C'_x z'_{x+2} + C''_x z''_{x+2} + C'''_x z'''_{x+2} + \text{etc.} \\ & + z'_{x+2} \Delta C'_x + z''_{x+2} \Delta C''_x + z'''_{x+2} \Delta C'''_x + \text{etc.} \end{aligned}$$

résultat que l'on réduit à

$$y_{x+2} = C'_x z'_{x+2} + C''_x z''_{x+2} + C'''_x z'''_{x+2} + \text{etc.}$$

par la supposition de

$$z'_{x+2} \Delta C'_x + z''_{x+2} \Delta C''_x + z'''_{x+2} \Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \ (2).$$

Faisant varier x une troisième fois, on parvient à

$$y_{x+3} = C''_x z'_{x+3} + C''_x z''_{x+3} + C'''_x z''_{x+3} + \text{etc.}$$

en

en posant

$$z'_{x+3}\Delta C'_x + z''_{x+3}\Delta C''_x + z'''_{x+3}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0\ (3),$$

et l'on continue ainsi jusqu'aux équations

$$y_{x+n-1} = C'_x z'_{x+n-1} + C''_x z''_{x+n-1} + C'''_x z'''_{x+n-1} + \text{etc.}$$
$$z'_{x+n-1}\Delta C'_x + z''_{x+n-1}\Delta C''_x + z'''_{x+n-1}\Delta C'''_x + \text{etc.} = 0\ (n-1).$$

Maintenant, si dans la valeur de y_{x+n-1} on change x en $x+1$, on trouvera

$$y_{x+n} = C'_x z'_{x+n} + C''_x z''_{x+n} + C'''_x z'''_{x+n} + \text{etc.}$$
$$+ z'_{x+n}\Delta C'_x + z''_{x+n}\Delta C''_x + z'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{etc.}$$

mettant dans l'équation (A) les valeurs de

$$y_x,\ y_{x+1},\ \ldots\ y_{x+n-1},\ y_{x+n},$$

en observant que, par l'hypothèse et d'après l'équation (B),

$$z'_{x+n} + P_x z'_{x+n-1} + Q_x z'_{x+n-2} \ldots + U_x z'_x = 0$$
$$z''_{x+n} + P_x z''_{x+n-1} + Q_x z''_{x+n-2} \ldots + U_x z''_x = 0$$
$$z'''_{x+n} + P_x z'''_{x+n-1} + Q_x z'''_{x+n-2} \ldots + U_x z'''_x = 0,$$

etc.

il restera

$$z'_{x+n}\Delta C'_x + z''_{x+n}\Delta C''_x + z'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{etc.} = V_x\ (n).$$

On conçoit facilement qu'avec le secours des équations (1), (2), ... ($n-1$), (n), on déterminera en fonctions de x, les différences $\Delta C'_x$, $\Delta C''_x$, $\Delta C'''_x$, etc. ce qui réduira la recherche des quantités C', C'', C''', etc. à l'intégration des fonctions d'une seule variable.

372. On ne sait pas intégrer en général l'équation

$$z_{x+n}+P_x z_{x+n-1}+Q_x z_{x+n-2}+R_x z_{x+n-3}\ldots+U_x z_x=0;$$

mais lorsque ses coefficiens, au lieu d'être des fonctions de x, sont des constantes, ou que l'on a seulement

$$z_{x+n}+Pz_{x+n-1}+Qz_{x+n-2}+Rz_{x+n-3}\ldots+Uz_x=0..(C),$$

on y satisfait en faisant $z_x=m^x$, d'où il résulte

$$z_{x+1}=m^{x+1},\qquad z_{x+2}=m^{x+2},\ldots\ldots z_{x+n}=m^{x+n};$$

car elle devient

$$m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}+Rm^{n-3}\ldots+U=0\ldots\ldots(D),$$

et se vérifie si l'on prend pour l'indéterminée m les racines de cette dernière. Si donc on désigne par m', m'', m''', etc. ces diverses racines, on aura (n° précéd.)

$$z_x=C'm'^x+C''m''^x+C'''m'''^x+\ldots\ldots$$

Cette expression présente par rapport aux quantités m', m'', m''', etc. les mêmes circonstances que l'intégrale de l'équation différentielle

$$d^nz+Pdxd^{n-1}z+Qdx^2d^{n-2}z\ldots\ldots+Uzdx^n=0\,(285).$$

Il peut arriver que les racines de l'équation (D) soient toutes inégales, ou qu'il s'en trouve d'égales entr'elles; dans le premier cas la valeur de z est complète; mais elle cesse de l'être dans le second. Il faut alors recourir à des artifices d'analyse, semblables à ceux qui ont été employés pour l'équation différentielle; mais je ne saurais m'engager ici dans ces détails, non

plus que dans ceux qui regardent les racines imaginaires.

373. L'équation (C), qui peut être considérée comme exprimant la nature d'une série dont un terme quelconque représenté par z_{x+n}, dépend des n termes qui le précèdent, se rapporte aux *séries récurrentes* (*Compl. des Élem. d'Alg.*) dont le terme général est z_x et dont l'échelle de relation est

$$-P, \quad -Q, \ldots\ldots -U:$$

l'intégration de cette équation répond donc à la recherche du terme général de la suite proposée ; mais en n'ayant égard qu'à la loi de sa formation, ses n premiers termes sont nécessairement arbitraires ; et si on les suppose donnés *à priori*, en les désignant par

$$z_0, \; z_1, \; z_2, \; z_3, \ldots\ldots z_{n-1},$$

on pourra former les équations

$$\begin{array}{llll}
z_0 = C' & + C'' & + C''' & + \text{etc.} \\
z_1 = C'm' & + C''m'' & + C'''m''' & + \text{etc.} \\
z_2 = C'm'^2 & + C''m''^2 & + C'''m'''^2 & + \text{etc.} \\
z_3 = C'm'^3 & + C''m''^3 & + C'''m'''^3 & + \text{etc.} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
z_{n-1} = C'm'^{n-1} & + C''m''^{n-1} & + C'''m'''^{n-1} & + \text{etc.}
\end{array}$$

au moyen desquelles on déterminera les constantes C', C'', C''',....... dont le nombre est aussi égal à n. La résolution de ces équations, qui ne sont d'ailleurs que du premier degré, peut être simplifiée par des artifices dont l'exposition ne saurait entrer dans un Traité élémentaire : on les trouve dans le Traité com-

plet, déjà cité plusieurs fois; je me bornerai à faire observer ici que cette recherche se lie avec celle des lois des phénomènes d'après les observations.

De la nature des arbitraires introduites par l'intégration aux différences, et de la construction de ces quantités.

374. Les quantités arbitraires introduites par l'intégration des équations aux différences à deux variables, ne sont pas nécessairement constantes comme celles qui complètent les intégrales des équations différentielles; mais pour donner aux résultats toute la généralité dont ils sont susceptibles, on doit regarder ces arbitraires comme variables. En effet, l'équation $\Delta y = 0$ n'exprime pas absolument que la fonction y soit constante, mais seulement qu'elle ne change point de valeur lorsque x devient $x + \Delta x$.

Si, par exemple, Δx est égal à 1, on pourra prendre pour y toutes les fonctions de x, qui conservent la même valeur quand on y met $x+1$, au lieu de x. Or il est facile de voir que parmi les fonctions circulaires, il s'en trouve un nombre infini qui jouissent de cette propriété: telles sont les fonctions de $\sin 2\pi x$, lorsque π désigne la demi-circonférence; car $\sin 2\pi(x+1) = \sin 2\pi x$. D'un autre côté, puisque $\sin z = \sin(\pi - z)$, si on prenait $y = \sin 2\pi x$, on aurait encore $\Delta y = 0$, lorsque x se change en $\frac{1}{2} - x$, mais cela n'arrive pas quand $y = \cos 2\pi x$. Si donc on veut former une fonction qui ne donne $\Delta y = 0$ que quand x devient $x + 1$, il faut la composer de manière que sa valeur dépende du signe du cosinus, aussi bien que de celui du sinus; c'est là ce qu'on entend par

$$y = \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

pour l'intégrale de $\Delta y = 0$, au lieu de $y = const.$ en considérant d'ailleurs la fonction φ comme entièrement arbitraire.

Il est évident que la fonction qui complète l'intégrale de l'équation $\Delta y = 0$, prise dans l'hypothèse de $\Delta x = 1$, compléterait aussi celle de toute autre équation aux différences du premier ordre prise dans la même hypothèse ; il faut donc dans l'intégrale de l'équation générale du premier ordre, donnée n° 370, substituer au lieu de C, la quantité $\varphi\ (\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x)$. Quand $\Delta x = h$, on écrit $\varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h}\right)$.

375. La détermination des fonctions arbitraires qui complètent les intégrales des équations aux différences, ne peut s'opérer en assujétissant ces intégrales à satisfaire à un nombre limité de valeurs données, car il est visible que toute fonction arbitraire comprend implicitement un nombre infini de valeurs arbitraires. Soit pour exemple l'équation

$$y_x = X\varphi\,(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x),$$

de laquelle on doive tirer un certain nombre de valeurs

$$y_0 = a, \quad y_1 = a', \quad y_2 = a'', \text{ etc.}$$

Si ces valeurs répondent à

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \text{ etc.}$$

on ne pourra satisfaire en général qu'à la première des conditions imposées ; car dès qu'on aura assigné pour $\varphi(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x)$, une première valeur déterminée, de laquelle il résulte $y_0 = a$, cette valeur devant se retrouver la même pour les indices $x = 1$, $x = 2$, etc.

il s'ensuit que les valeurs de y_x, relatives à ces indices, sont aussi déterminées : il faut donc que les quantités données a', a'', etc. correspondent à des indices intermédiaires.

Si, au lieu d'assigner un nombre limité de valeurs isolées, indépendantes les unes des autres, on suppose que dans l'intervalle compris entre $x=0$, et $x=1$, l'expression y_x doive fournir les mêmes valeurs qu'une équation donnée $y_x=\mathrm{f}(x)$, la question sera déterminée. En effet, s'il s'agissait de trouver la valeur de y qui correspond à un indice égal à un nombre entier quelconque m, plus une fraction n, soit commensurable, soit incommensurable, on calculerait la valeur de y_n, d'après l'équation $y_x=\mathrm{f}(x)$: comparant le résultat avec celui que donne alors l'équation

$$y_n = X_n \varphi(\sin 2\pi n,\ \cos 2\pi n),$$

on aurait, pour ce cas, la valeur de

$$\varphi(\sin 2\pi n,\ \cos 2\pi n),$$

qui doit être la même que celle de

$$\varphi(\sin 2\pi(m+n),\ \cos 2\pi(m+n));$$

et l'équation

$$y_x = X\varphi(\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x),$$

devenant par là

$$y_{m+n} = X_{m+n}\varphi(\sin 2\pi n,\ \cos 2\pi n),$$

serait entièrement déterminée.

La seule condition à laquelle soit assujétie l'équation $y_x=\mathrm{f}(x)$, c'est qu'on en tire pour y_0 et pour y_1

les mêmes valeurs que de l'équation

$$y_x = X\phi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x).$$

376. Les remarques précédentes s'offrent d'elles-mêmes, par les considérations géométriques. Si l'on construit sur la droite AR, *fig.* 56, menée à une dis- FIG. 56.
tance quelconque de l'axe des abscisses OX, parallèlement à cet axe, et divisée en parties AA', $A'A''$, $A''A'''$, etc. égales à Δx, des courbes telles que

$$ABA'B'A''B''A'''S,\ ACA'C'A''C''A'''T,\ ADA'D'A''D''A'''U, \text{etc.}$$

passant par les points A, A', A'', A''', etc. et composées, entre ces points de parties égales et semblables, ces courbes satisferont à l'équation $\Delta y = 0$. Cela est d'abord évident pour les points A, A', A'', A''', etc. et l'on voit ensuite que, prenant $AP = x$, $AP' = x + \Delta x$, les arcs

$$AL \text{ et } A'L',\ AM \text{ et } A'M',\ AN \text{ et } A'N', \text{ etc.}$$

étant égaux et semblables, les ordonnées

$$LP \text{ et } L'P',\ MP \text{ et } M'P',\ NP \text{ et } N'P', \text{ etc.}$$

seront aussi respectivement égales; et l'on aura par-conséquent pour chaque courbe $\Delta y = 0$.

La condition $\Delta y = 0$, n'entraînant point la continuité dans les résultats, les courbes AS, AT, AU, etc. ne seront point assujéties à cette loi. Le polygone $EFE'F'E''F''E'''\ldots V$, composé de parties semblables EFE', $E'F'E''$, etc. donne également $\Delta y = 0$, aux intervalles marqués par Δy; il en serait de même d'une suite d'arcs égaux et semblables d'une courbe quelconque, assemblés d'une manière discontinue, comme le sont les arcs GH, $G'H'$, $G''H''$, etc.

Il est visible que l'équation $y=\varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{\Delta x}, \cos\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$ donne lieu à des lignes qui satisfont aux conditions ci-dessus.

377. La construction des équations aux différences s'accorde parfaitement avec ce qui a été dit (375) sur la détermination analytique des fonctions arbitraires. Soit $\Delta y = F(x,y)$, une équation de ce genre et du premier ordre; ayant choisi arbitrairement, ou déterminé, suivant les conditions de la question, le premier
FIG. 57. point B, *fig.* 57, de la courbe cherchée, comme l'équation proposée n'apprend rien sur tous les points correspondans à la portion d'abscisses $AA' = \Delta x$, et qu'elle donne seulement l'ordonnée $A'B' = y_1$, on pourra faire passer par les points B et B', une portion d'une courbe quelconque. Cela fait, pour obtenir la portion correspondante à l'abscisse $A'A''$, on prendra en arrière d'un point quelconque P' de cette abscisse, une distance $PP' = AA' = \Delta x$, et élevant l'ordonnée PM, on mènera MD' parallèle à PP'; tirant ensuite de l'équation... $\Delta y = F(x,y)$, la valeur de Δy pour l'abscisse AP, cette valeur donnera la droite $D'M'$, qui, jointe à $P'D' = PM$, fera connaître le point M'. On trouvera de même tous les points de l'arc $B'B''$; cet arc employé à son tour comme l'arc BB', donnera ceux du troisième arc $B''B'''$, et ainsi de suite.

Il est évident que l'on pourrait, par le même procédé, continuer la courbe en arrière du point A, et que dans tous les cas elle satisfera à l'équation proposée, puisque les différences $\Delta y = D'M'$ auront des valeurs conclues de cette équation : je laisse au lecteur à faire l'application de ce procédé aux équations du second ordre et des ordres supérieurs.

On n'a considéré ici que les équations aux différences relatives à l'hypothèse de $\Delta x = const.$, les autres se ramènent à celles-ci par un procédé fort simple dû à Laplace, et inséré dans le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral.*

Application du Calcul intégral à la Théorie des suites.

378. L'intégration des différentielles à une seule variable ayant conduit à des séries, on en a conclu qu'on pouvait représenter une série par une intégrale; et comme on a des méthodes pour calculer, au moins par approximation, la valeur d'une intégrale entre des limites données (213) on a cherché à remonter d'une série à l'intégrale dont elle est un des développemens. C'est par ces considérations qu'Euler a créé, pour la sommation des séries et la recherche de leur terme général, des méthodes très-ingénieuses dont voici quelques exemples :

Soit d'abord

$$\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2\ldots+\frac{n\alpha+\beta}{na+b}x^n+\text{etc.}$$

la série proposée; on multipliera par px^r les deux membres de l'équation

$$s=\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{2\alpha+\beta}{2a+b}x^2\ldots+\frac{n\alpha+\beta}{na+b}x^n,$$

et passant ensuite aux différentielles, on aura

$$p\mathrm{d}(sx^r)=\frac{p(1+r)(\alpha+\beta)x^r\mathrm{d}x}{a+b}\ldots\ldots$$
$$+\frac{p(n+r)(n\alpha+\beta)x^{n+r-1}\mathrm{d}x}{na+b};$$

Le facteur $na+b$ disparaîtrait du dénominateur du terme général, et parconséquent de tous les autres, si l'on avait $p(n+r)=na+b$; on fera donc $np=na, rp=b$,

d'où $$p=a,\quad r=\frac{b}{a},$$

ce qui donnera cette équation

$$\frac{ad(sx^{\frac{b}{a}})}{dx}=(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}}+(2\alpha+\beta)x^{1+\frac{b}{a}}\dots\dots\dots\dots+(n\alpha+\beta)x^{n-1+\frac{b}{a}}$$

dont le second membre ne renferme plus de dénominateur. De nouvelles opérations, semblables à la précédente, feraient disparaître les facteurs qui resteraient, si le dénominateur en contenait plus d'un.

En multipliant la même équation par $px^r dx$, et prenant ensuite l'intégrale de chaque terme, il viendra

$$pa\int x^r d(sx^{\frac{b}{a}})=\frac{pa(\alpha+\beta)}{a+b+ra}x^{1+\frac{b}{a}+r}\dots+\frac{pa(n\alpha+\beta)}{na+b+ra}x^{n+\frac{b}{a}+r};$$

le facteur $n\alpha+\beta$ du numérateur disparaîtra si l'on fait

$$npu\alpha=na,\quad \beta pa=b+ra,$$

d'où il suit

$$p=\frac{1}{\alpha},\quad r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a};$$

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}d(sx^{\frac{b}{a}})=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}+x^{\frac{\beta}{\alpha}+2}\dots\dots\dots+x^{\frac{\beta}{\alpha}+n}$$

$$=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\{1+x+x^2\dots\dots+x^{n-1}\},$$

et parconséquent

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\mathrm{d}(sx^{\frac{b}{a}})=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

On tire de là

$$s=\frac{\alpha\int x^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}\left(x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right)}{ax^{\frac{b}{a}}}.$$

379. Dans la série que j'ai considérée ci-dessus, le nombre des facteurs, soit du numérateur, soit du dénominateur, était le même pour chaque terme; mais il est une classe de séries qu'Euler désigne sous le nom d'*hypergéométriques*, dans laquelle ce nombre augmente d'un terme à l'autre : la série

$$s=\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{(a+b)(2a+b)}x^2\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots\ldots(na+b)}x^n$$

est de cette classe. On va voir que leur sommation se ramène à l'intégration d'une équation différentielle.

En multipliant les deux membres de l'équation ci-dessus par px^r, et prenant leurs différentielles, on obtiendra

$$\frac{p\mathrm{d}(sx^r)}{\mathrm{d}x}=\frac{p(1+r)(\alpha+\beta)}{(a+b)}x^r\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{p(n+r)(\alpha+\beta)\ldots(n\alpha+\beta)}{(a+b)\ldots(na+b)}x^{n+r-1}.$$

On fera disparaître le facteur $na + b$ du dénominateur, en posant

$$np + rp = na + b,$$

d'où

$$np = na, \quad rp = b,$$

$$p = a, \quad r = \frac{b}{a},$$

$$\frac{a\mathrm{d}(sx^{\frac{b}{a}})}{\mathrm{d}x} = (\alpha + \beta)x^{\frac{b}{a}} + \frac{(\alpha + \beta)(2\alpha + \beta)}{(a + b)}x^{1 + \frac{b}{a}}$$

$$+ \frac{(\alpha + \beta) \ldots\ldots (n\alpha + \beta)}{(a + b) \ldots ((n - 1)a + b)}x^{n - 1 + \frac{b}{a}}$$

En multipliant ce résultat par px^r, et prenant l'intégrale de chacun des membres, on trouvera l'équation

$$pa\int x^r \mathrm{d}(sx^{\frac{b}{a}}) = \frac{pa(\alpha + \beta)}{a + b + ra}x^{1 + \frac{b}{a} + r}$$

$$+ \frac{pa(\alpha + \beta) \ldots\ldots\ldots\ldots (n\alpha + \beta)}{(na + b + ra)(a + b) \ldots ((n - 1)a + b)}x^{n + \frac{b}{a} + r}$$

et le facteur $n\alpha + \beta$ disparaîtra du numérateur, si

$$npa\alpha + pa\beta = na + b + ra,$$

ou si

$$p = \frac{1}{\alpha}, \quad r = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{a}.$$

Mettant ensuite à part, dans le second membre, le facteur commun $x^{\frac{\beta}{\alpha} + 1}$, il viendra

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\,\mathrm{d}(sx^{\frac{b}{a}})=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left\{1+\frac{(\alpha+\beta)x}{a+b}\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots((n-1)\alpha+\beta)x^{n-1}}{(a+b)\ldots((n-1)a+b)}\right\}.$$

La série comprise entre les accolades du second membre de ce résultat, n'est autre chose que la proposée dont on a ôté le dernier terme, et à laquelle on a ajouté l'unité; on conclura donc de ce qui précède,

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\,\mathrm{d}(sx^{\frac{b}{a}})=x^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\left\{1+s\right.$$

$$\left.-\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots(an+b)}x^{n}\right\}.$$

En différentiant deux fois de suite cette équation, on la délivrera de l'intégration et de la différentiation qui y sont indiquées, et l'on obtiendra l'équation d'où dépend la somme cherchée.

Cet exemple montre comment on opérerait sur d'autres cas plus compliqués, de la classe des séries dont il fait partie, en observant que chaque intégration offre le moyen de faire disparaître un facteur du numérateur, et chaque différentiation un facteur du dénominateur.

380. Si on faisait abstraction du dernier terme, on aurait, au lieu de la somme particulière, la limite de la série considérée à l'infini, ou la fonction *généra-*

trice de cette série, car il est visible que les procédés ci-dessus sont inverses de ceux par lesquels on détermine les séries qui satisfont à des équations différentielles données.

S'il s'agissait, par exemple, de trouver la limite de la série

$$s = 1x - 1.2x^2 + 1.2.3x^3 - \text{etc.}$$

on pourrait appliquer à cette recherche la première transformation du n° précédent, en faisant

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ a = 0,\ b = 1;$$

mais on y parviendra directement en multipliant par x les deux membres de l'équation posée plus haut, et en les différentiant ensuite. On obtiendra de cette manière

$$sx = 1x^2 - 1.2x^3 + 1.2.3x^4 - \text{etc.}$$

$$\frac{\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x} = 1.2x - 1.2.3x^2 + 1.2.3.4x^3 - \text{etc.}$$

et multipliant la dernière équation par x, il viendra l'équation

$$x\frac{\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x} = 1.2x^2 - 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4 - \text{etc.}$$

dont le second membre est évidemment égal à $x - s$; ainsi on aura

$$x - s = \frac{x\mathrm{d}(sx)}{\mathrm{d}x}$$

ou

$$\mathrm{d}s + \frac{s(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

L'intégrale de cette dernière équation est

$$s=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\int e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \text{ (257)}.$$

Pour que l'expression ci-dessus réponde à la série proposée, il faut que l'intégrale s'évanouisse lorsque $x=0$; et si on la prend jusqu'à $x=1$, on aura la quantité correspondante à la série divergente

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+\text{etc.}$$

381. C'est de cette manière que les intégrales définies servent à évaluer des quantités qu'on obtiendrait difficilement par d'autres moyens ; elles prennent souvent des valeurs remarquables.

On voit à la simple inspection des cas particuliers de l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, rapportés dans le n° 173, que ces expressions se réduisent à un seul terme lorsqu'on les prend entre les limites $x=0$ et $x=1$: l'arc A devenant égal au quart de la circonférence, on a ces deux suites

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}, \qquad \int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=1,$$

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.\pi}{2.2}, \qquad \int\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3},$$

$$\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3\pi}{2.4.2}, \qquad \int\frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4}{3.5},$$

$$\int\frac{x^6\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5\pi}{2.4.6.2}, \qquad \int\frac{x^7\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6}{3.5.7},$$

$$\int\frac{x^8\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.7\pi}{2.4.6.8.2}, \qquad \int\frac{x^9\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9},$$

etc.

et d'après ce tableau, on a en général

$$\int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots\ldots 2r}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots\ldots 2r}{3.5.7\ldots\ldots(2r+1)},$$

d'où il suit

$$\left(\int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2r+1}\,\frac{\pi}{2}.$$

En divisant, au contraire, la seconde formule par la première, on trouve

$$\frac{\displaystyle\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\displaystyle\int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2.2.4.4\ldots\ldots\ldots 2r.2r}{1.3.3.5.5\ldots(2r-1)(2r-1)(2r+1)}.$$

Pour savoir ce que devient le premier membre lorsqu'on pousse le nombre de facteurs du second jusqu'à l'infini, ou lorsqu'on fait r infini, je prends $x^{2r} = z$; les limites de z sont les mêmes que celles de x; mais on a

$$x = z^{\frac{1}{2r}}, \quad dx = \frac{1}{2r} z^{\frac{1}{2r}-1} dz$$

$$\int \frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\int \frac{z^{\frac{2}{2r}}dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}}$$

$$\int \frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\int \frac{z^{\frac{1}{2r}}dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}}.$$

Le

Le rapport des différentielles étant $z^{\frac{1}{2r}}$, approche d'autant plus de z^0 ou de 1, que le nombre r augmente; et en passant à la limite, on peut regarder ce rapport comme égal à 1; il en sera alors de même de celui des intégrales, puisqu'elles commencent et finissent en même temps : on conclura donc de là

$$1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.\ 9.11.\text{etc.}},$$

et parconséquent

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.\ 9.11.11.\text{etc.}}$$

382. Cette expression de la circonférence du cercle est due à Wallis; elle entre dans une formule donnée par Stirling, pour calculer la somme d'une suite de logarithmes appartenans à des nombres en progression par différences, et à laquelle on peut parvenir comme il suit :

Par le n° 367, on a $S\text{l}x=\Sigma\text{l}x+\text{l}x$; mettant dans cette équation pour $\Sigma\text{l}x$ ce que devient l'expression de Σu du n° 363, lorsqu'on fait $u=\text{l}x$ et $h=1$, et en observant que $\int dx\text{l}x=x\text{l}x-x$ (132), on obtiendra

$$S\text{l}x=x\text{l}x-x+(1+A)\,\text{l}x$$
$$+\frac{B}{x}-\frac{C}{x^2}+\frac{2D}{x^3}-\text{etc.}+\textit{const.}$$

puis calculant le développement de la fonction $\frac{1}{e^h-1}$, suivant les puissances de h, on trouvera

$$A=-\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{12},\quad C=0,\quad D=-\frac{1}{720},\ \text{etc.}$$

On ne saurait déterminer la constante en faisant $x=1$, parceque la suite des coefficiens A, B, etc. finit par être divergente : on a recours à l'expression de π du n° précédent. En passant aux logarithmes, et s'arrêtant au nombre pair $2x$ dans le numérateur, on obtient

$$l\pi - l2 = \left\{ \begin{array}{l} 2l2+2l4+2l6+2l8+2l10\ldots+2l(2x-2)+l2x \\ -l1-2l3-2l5-2l7-2l9\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1); \end{array} \right.$$

et en prenant les limites dans la supposition de x infini, on trouvera, par le moyen de l'expression précédente de Slx,

$$l1+l2+l3+l4\ldots+lx = const.+(x+\tfrac{1}{2})lx-x$$
$$l1+l2+l3+l4\ldots+l2x = const.+(2x+\tfrac{1}{2})l2x-2x$$
$$l2+l4+l6\ldots+l2x = Slx+xl2 = const.+(x+\tfrac{1}{2})lx+xl2-x.$$

Retranchant la troisième série de la seconde, il vient

$$l1+l3+l5+l7\ldots+l(2x-1) = xlx+(x+\tfrac{1}{2})l2-x,$$

d'où l'on conclut

$$\left. \begin{array}{l} 2l2+2l4+2l6\ldots+2l(2x-2)+l2x \\ -2l1-2l3-2l5\ldots-2l(2x-3)-2l(2x-1) \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2\,const.+2(x+\tfrac{1}{2})lx+2xl2-2x-l2x \\ -2xlx-2(x+\tfrac{1}{2})l2+2x; \end{array} \right.$$

et comme le premier membre de cette équation est égal à $l\pi-l2$, on obtient, après la réduction du second,

$$l\pi - l2 = 2\,const. - 2l2,$$

d'où $\quad const. = \tfrac{1}{2}(l\pi+l2) = \tfrac{1}{2}l2\pi = l\sqrt{2\pi}$;

résultat bien remarquable, et d'après lequel on a

$$Slx = \tfrac{1}{2}l2\pi + xlx - x + \tfrac{1}{2}lx + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{etc.}$$

On rendra cette équation propre à un système quelconque de logarithmes, en multipliant par le module les termes dans lesquels il n'entre point de logarithmes.

383. Euler, en s'occupant de la formule ci-dessus, s'en est servi pour trouver la somme des logarithmes des 1000 premiers nombres des Tables, c'est-à-dire la valeur de

$$l1 + l2l + l2 \ldots . + l1000.$$

La caractéristique l désignant ici des logarithmes ordinaires, le module sera, pour abréger, représenté par M; et comme $x = 1000$, il viendra

$$\begin{array}{lcr} xlx & = & 3000,0000000000000 \\ +\tfrac{1}{2}lx & = & 1,5000000000000 \\ +\tfrac{1}{2}l2\pi & = & 0,3990899341790 \\ -Mx & = - & 434,2944819032518 \\ +\dfrac{M}{12x} & = + & 0,0000361912068 \\ -\dfrac{M}{360x^3} & = - & 0,0000000000012, \end{array}$$

résultat.............. 2567,6046442221328;

mais, suivant la notation du nº 370,

$$l1 + l2 + l3 \ldots\ldots + l1000 = l1.2.3\ldots.1000 = l[1000]^{1000}:$$

on aura donc

$$\mathrm{l}[1000]^{1000} = 2567,6046442221328.$$

On apprend par là que le nombre $[1000]^{1000}$, dont le calcul est presque impraticable, doit avoir 2568 chiffres, et que les sept premiers chiffres sur la gauche sont 4023872, ensorte qu'il est compris entre les nombres qui résultent de 4023872 et de 4023873, suivis chacun de 2561 zéros. Cette connaissance suffit dans beaucoup de recherches où l'on ne demande que les rapports des produits des grands nombres; et dans ce cas, la valeur approchée de ces rapports devient précieuse par l'impossibilité où l'on est d'effectuer les calculs nécessaires pour arriver à la valeur exacte. La longueur de ces calculs présente alors un obstacle aussi insurmontable que la difficulté d'exprimer rigoureusement une fonction transcendante. Laplace a beaucoup étendu cette recherche, dont les applications sont très-fréquentes dans le calcul des probabilités.

384. Les intégrales définies fournissent aussi le moyen de représenter des portions de la série

$$u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

en partant d'un terme quelconque. Voici comment d'Alembert y parvient, et démontre en même temps le théorême de Taylor (*Recherches sur differens points importans du système du monde*, tome I, page 50):

Soit u' ce que devient la fonction u, lorsqu'on y change x en $x+h$; en posant

$$u' = u + P,$$

et différentiant par rapport à h, qui n'entre pas dans u, il vient

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}h}, \quad \text{d'où} \quad P = \int \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h}\mathrm{d}h,$$

$$u' = u + \int \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h}\mathrm{d}h.$$

Soit

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Q;$$

en différentiant de nouveau par rapport à h, on a

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}h}, \quad \text{d'où} \quad Q = \int \frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2}\mathrm{d}h,$$

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \int \frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2}\mathrm{d}h, \quad \int \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}h}\mathrm{d}h = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + \int\int \frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2}\mathrm{d}h^2,$$

$$u' = u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + \int\int \frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2}\mathrm{d}h^2.$$

Faisant encore

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + R,$$

on trouve

$$\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}h^3} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}h}, \quad \text{d'où} \quad R = \int \frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}h^3}\mathrm{d}h,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}h^2} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \int \frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}h^3}\mathrm{d}h,$$

$$u' = u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1} + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2} + \int\int\int \frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}h^3}\mathrm{d}h^3.$$

En continuant ainsi, on arriverait à

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} + \int^n \frac{d^n u'}{dh^n} dh^n;$$

les intégrales étant prises de manière à s'évanouir lorsque $h = 0$.

385. Soit, pour abréger, $\frac{d^n u'}{dh^n} = H$; on aura (220),

$$\int^n H dh^n =$$
$$\frac{1}{1.2\dots(n-1)}\left\{h^{n-1}\int H dh - \frac{(n-1)h^{n-2}}{1}\int Hh dh\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)h^{n-3}}{1.2}\int Hh^2 dh - \text{etc.}\right\};$$

et il est facile de voir qu'on pourra substituer à la série ci-dessus, l'expression

$$\frac{1}{1.2\dots(n-1)}\int H(t-h)^{n-1} dh,$$

prise depuis $h = 0$, pourvu qu'on change après l'intégration t en h; car si on développe cette expression, qu'on passe hors du signe $\int$ les puissances de t qui multiplient les différens termes, et qu'on fasse ensuite $t = h$, on retombera sur la série ci-dessus.

Il suit de là que

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2.3.(n-1)} + \frac{1}{1.2\dots(n-1)}\int \frac{d^n u'}{dh^n}(t-h)^{n-1} dh,$$

pourvu qu'on prenne l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $h=0$, et qu'on change ensuite t en h.

On peut, dans cette formule, changer $\frac{d^n u'}{dh^n}$ en $\frac{d^n u'}{dx^n}$ (21); et si on fait, sous le signe intégral, $t-h=zt$, ou $h=t(1-z)$, on aura

$$dh=-tdz, \quad \int \frac{d^n u'}{dx^n}(t-h)^{n-1}\,dh = -\int \frac{d^n u'}{dx^n} t^n z^{n-1} dz.$$

Les limites de l'intégrale seront alors $z=1$, $z=0$; on la rendra positive, en renversant l'ordre de ces limites, c'est-à-dire, en la prenant depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$: enfin sortant t^n du signe $\int$, et écrivant h au lieu de t, le dernier terme de la formule ci-dessus deviendra

$$\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)} \int \frac{d^n u'}{dx^n} z^{n-1} dz.$$

C'est Lagrange qui a donné ce dernier théorême, mais d'une autre manière, dans la *Théorie des Fonctions analytiques*, n[os] 47 et suivans.

Il s'en sert pour prouver qu'on peut toujours rendre la somme de tous les termes de la série de Taylor, à partir d'un terme donné, plus petite que le précédent. Si M et m désignent la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $\frac{d^n u'}{dx^n}$ dans l'intervalle de x à $x+h$, on s'assurera facilement que

$$\int \frac{d^n u'}{dx^n} z^{n-1} dz < \int M z^{n-1} dz \text{ et } > \int m z^{n-1} dz,$$

si le coefficient différentiel $\frac{d^n u'}{dx^n}$ ne change point de signe ou ne devient point infini dans cet intervalle (211). Dans les limites données, ces deux dernières intégrales sont $\frac{M}{n}$ et $\frac{m}{n}$; et en prenant h d'une petitesse convenable, on rendra la quantité $\frac{h^n}{1.2\ldots n}M$ aussi petite qu'on voudra, vis-à-vis de $\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$.

FIN.

ERRATA.

Page 4, ligne 16, $u-u'$, *lisez* $u'-u$.
— 13, — 10, $\frac{dv}{v}$, *lisez* $\frac{du}{v}$.
— 19, — 4, $\frac{2}{3}(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}$, *lisez* $\frac{2}{3}(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}$.
— *ibid.* — 14, aussi, *lisez*, ainsi.
— 21, — 5, $n(n-1)x^{n-2}dx$, *lisez* $(n-1)x^{n-2}dx$.
— 23, — 14, $a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}$, *lisez* $a^{\frac{4}{3}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}$.
— 27, — 8, $(a-3)^3$, *lisez* $(a-1)^3$.
— *ibid.* — 10, + etc., *lisez* — etc.
— 31, — 5, $\frac{u^4}{5}$, *lisez* $\frac{u^5}{5}$.
— 32, — 10, *au dénom.* 3.3^5, *lisez* 5.3^5.
— 37, — 1, sans cela à, *lisez* sans cela.
— 38, — 12, d.cos, *lisez* d.cos x.
— 41, — 6, $2u\sqrt{1+u^2}$, *lisez* $2u\sqrt{1-u^2}$.
— 45, — 5, $-\frac{1}{7\cdot(239)^6}$, *lisez* $-\frac{1}{7\cdot(239)^7}$.
— *ibid.* — 9, *mettez la parenthèse après le premier signe* —.
— 65, — 18, ont, *lisez* a.
— 71, — 25, $\frac{-}{0}$, *lisez* $\frac{0}{0}$.
— 73, — 8, (24, 25), *lisez* (27).
— 77, — 1, *au dénominateur*, $\frac{2}{3}$, *lisez* $\frac{3}{2}$.
— 79, — 9, (24), *lisez* (27).
— 85, — 13, PM', *lisez* $P'M'$.
— 86, — 11, MQ, *lisez* $M'Q$.
— 88, — 4, asbcisses, *lisez* abscisses.
— 101, — 25, $y=y'+\ldots$, *lisez* $y'=y+\ldots$
— 105, — 4, des, *lisez* deux.
— *ibid.* — *dernière*, nomber, *lisez* nombre.
— 107, — 20, *effacez* 3°.
— 108, — 14, $\frac{d^2y}{dx}$, *lisez* $\frac{d^2y}{dx^2}$.
— 121, — 19, $\frac{dy'^2}{dx'^2}$, *lisez* $\frac{d^2y'}{dx'^2}$.
— 124, — 7, de tous les cercles, *lisez* de tous les centres des cercles.
— *ibid.* — 29, $yd\gamma$, *lisez* $\gamma d\gamma$.

Page 125, ligne 6, est tangente dont, *lisez* est tangente à al courbe dont.
— *ibid.* — *avant-dernière*, OM', *lisez* $O'M'$.
— 126, — 22, $G'M'H$, *lisez* $G'MH'$; *ibid.* $D'M'$, *lisez* DM'.
— 132, — 3, $4(mx+2nx^2)$, *lisez* $4(mx+nx^2)$; ibid. *au numérateur, changez l'exposant* 3 en $\frac{3}{2}$.
— 139, — 12, se conforme, *lisez* se confond.
— *ibid.* — 6 *de la note*, $x=$ arc...; *lisez* $x=a$, arc....
— 143, — 9, $-\frac{a}{y}$, *lisez* $-\frac{a}{y^2}$. *Ibid.* y, *lisez* y^2.
— 148, — 18, u, *lisez* $u^{\frac{1}{n}}$.
— 156, — 7, $2dudt^2$, *lisez* $2dudt$.
— 160, — 13, $\frac{d^2y}{dx}$, *lisez* $\frac{d^2y}{dx^2}$.
— 163, — 17, $xdx+zdz=a$, *lisez* $xdx+zdz=0$.
— 164, — 25, d'abord en, *lisez* d'abord x en.
— 168, — 19, pifféreutiant, *lisez* différentiant.
— 170, — 1, port, *lisez* rapport.
— 178, — 11, $2\frac{d^2u}{dxdz}$, *lisez* $2\frac{d^2u}{dxdz}\frac{dz}{dx}$.
— 184, — 19, $\frac{d^2u}{dx}$, *lisez* $\frac{d^2u}{dx^2}$.
— 185, — 4, $\frac{du^2}{dx^2}$, *lisez* $\frac{d^2u}{dx^2}$.
— 186, — 15, $\frac{dv}{dx}$, *lisez* $\frac{dv}{dy}$.
— 206, — 2, $v^{-2}du$, *lisez* $v^{-2}dv$.
— 207, — 7, $(z-b^m)$, *lisez* $(z-b)^m$.
— 208, — 7, *ajoutez des points à la suite du dénominateur.*
— *ibid.* — 12, q, lisez Q.
— 209, — 16, N, N', N'', *lisez* Ndx, $N'dx$, $N''dx$.
— 215, — 4, 1, *lisez* β.
— *ibid.* — 15, peut, *lisez* qui peut.
— 217, — 9, *au dénom.* $(z+\beta^2)^{q-1}$, *lisez* $(z^2+\beta^2)^{q-1}$.
— *ibid.* — 15, *effacez* L_1.
— 219, — 19, $x+a$, *lisez* $x+a=0$.
— 225, — 5, $\frac{Ax+B}{R^n}+\ldots$, *lisez* $\frac{U}{V}=\frac{Ax+B}{R^q}+\ldots$
— 228, — 15, *au dén.* $x-1$, *lisez* $x+1$.
— 229, — 8, $-x^5$, *lisez* $+x^5$; $+x^4$, *lisez* $-x^4$.
— *ibid.* — 15, $x=1$, *lisez* $x=0$.
— 230, — 2, $u=0$, *lisez* $u'=0$.

Pag. 233, lig. 20, *au dén. de* dx, (z^2+1), *lisez* $(z^2+1)^2$.
— 234, — 9, $+\,\mathrm{l}\frac{2}{\sqrt{C}}$, *lisez* $-\frac{1}{\sqrt{C}}\,\mathrm{l}\frac{2}{\sqrt{C}}$.
— 241, — 5, puisqu'en, *lisez* puis, en.
— 242, — 8, *après* $\sqrt{-1}$, *écrivez* sin.
— 243, — 7, *après* -1, *mettez* :.
— 244, — 16, *au dén.* $2n$, *lisez* n.
— *ibid.* — dernière, $-\frac{(2m+1)\pi}{n}$, *lisez* $-2y\cos\frac{(2m+1)\pi}{n}$.
— 246, — 6, et p pourra, *effacez* p.
— 247, — 6, y^n, *lisez* y^{2n}.
— 252, — 10, *au numér. changez l'exposant* $p-1$ *en* $p+1$.
— 253, — 15, m et n, *lisez* m et p.
— *ibid.* — 16, for ules, *lisez* formules.
— 255, — 14, $\frac{1.6}{3.7}x^4$, *lisez* $\frac{1.6}{5.7}x^4$.
— 257, — 3, *au dernier terme* x^{m-1}, *lisez* x^{m-2}.
— 258, — 1, $-\frac{1}{2}\mathrm{l}$, *lisez* $\frac{1}{2}\mathrm{l}$.
— 268, — 10, Px, *lisez* $P\mathrm{d}x$.
— 269, — 5, $x^m\mathrm{d}x(\mathrm{l}x)$, *lisez* $x^m\mathrm{d}x(\mathrm{l}x)^n$.
— 270, — 1, $\frac{1}{(m+1)^2}$, *lisez* $\frac{1.2}{(m+1)^3}$.
— 271, — 13, $(n-m+1)$, *lisez* $(n-m)$.
— *ibid.* — 16, $\frac{n-1}{m+1}$, *lisez* $\frac{m+1}{n-1}$.
— 272, — 16, *au numér.* lx, *lisez* lz.
— 273, — 1, e^u, *lisez* $e^u\mathrm{d}u$.
— 275, — 2, $-\frac{n}{\mathrm{l}a}$, *lisez* $-\frac{n}{\mathrm{l}a}x^{n-1}$.
— 276, — 20, (25), *lisez* (27).
— 277, — 14, ll$x$, *lisez* ll$z$.
— 279, — 19, $\int z^n X\mathrm{d}z$, *lisez* $\int z^n X\mathrm{d}x$.
— 283, — 8, $\cos x\,-$, *lisez* $\cos x\,+$.
— *ibid.* — 10, $\cos x\,+$, *lisez* $\cos x\,-$.
— *ibid.* — 14, $\cos x$, *lisez* $\cos x^n$.
— 284, — 16, $\frac{n(n-1)}{2}$, *lisez* $\frac{n(n-1)}{1.2}$.
— 285, — 6, $\frac{1}{2}v^n$, *lisez* $\frac{1}{2}v^n$.
— 286, — 14, correspond au, *lisez* correspond un.
— 291, — 11 *et* 12, chacun. Car, *ponctuez* chacun; car.
— *ibid.* — 16, négatif, à la vérité, *ponctuez* négatif. A la vérité.
— 292, — 7, $-5\sin 2x$, *lisez* $-5\sin 3x$.

Pag. 293, lig. 12, $\int z^m dz(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$, *lisez* $\int z^m dz(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$.
— 294, — 4, même, *lisez* mêmes.
— *ibid.* — 8, d.cos z, *lisez* — d.cos z.
— 296, — 6, *au deuxième terme* cos z, *lisez* sin z.
— *ibid.* — 15, d.cos z, *lisez* — d.cos z.
— *ibid.* — 17, $\int u^q du\ldots$, *lisez* $-\int u^q du\ldots$
— 298, — 9, générale, *lisez* général.
— *ibid.* — 15, $n = 1$, *lisez* $n = -1$.
— 299, — 8, *au dénom.* sin z^{m+1}, *lisez* sin z^{m-1}.
— 305, — 21, $b\ \ a$, *lisez* $b - a$.
— 308, — 2, B, B, B, *lisez* B, B', B''.
— 309, — 9, la somme, *lisez* la moitié de la somme.
— *ibid.* — 15, A, *lisez* A'''.
— *ibid.* — 21, x, *lisez* X.
— 310, — 25, PM'', PM''', *lisez* $P'M''$, $P''M'''$.
— 312, — 25, $-\sqrt{1-x}$ *lisez* $-2\sqrt{1-x}$.
— 314, — 2, *premier membre*, $\sqrt{z}$, *lisez* $2\sqrt{z}$; $23a^2$, *lisez* $32a^2$; *deuxième membre*, $\sqrt{az}$, *lisez* $\frac{1}{2}\sqrt{az}$.
— 315, — 5, $e^{\frac{1}{x}}$, *lisez* $e^{-\frac{1}{x}}$.
— 326, — 8, *au numér.* $np^{\frac{1}{n}}x$, *lisez* $np^{\frac{1}{n}}$.
— 327, — 5, a, *lisez* a^2.
— 328, — 18, $^1 AC$, *lisez* $\frac{1}{2} AC$.
— *ibid.* — 20, APN, *lisez* de ANP.
— *ibid.* — 26, $2axx$, *lisez* $2ax$.
— 332, — 14, $cOMX$, *lisez* $COMX$.
— *ibid.* — *dernière*, *mettez un signe* $\int$ *au second membre*.
— 342, — 9, $\frac{4\ ab^2}{3}$, *lisez* $\frac{4\pi ab^2}{3}$.
— 343, — 12, $AMPQ$, *lisez* $AM'PQ$.
— 344, — 21, Pp', *lisez* Pp; Qq', *lisez* Qq.
— 347, — 16, $\frac{\pi}{y}$ ly, *lisez* $\frac{\pi}{2}$ ly.
— 350, — 2, r^2y, *lisez* r^2.
— 351, — *avant-dernière*, rapport de, *supprimez* de.
— 353, — 3, $\sqrt{1+p^2+q^2}$, *lisez* $= \sqrt{1+p^2+q^2}$.
— 358, — 10, peut simplifier, *lisez* peut se simplifier.
— *ibid.* — *avant-dernière*, l$(1-z)$, *lisez* l$(1-z)^x$.
— 365, — 16, *en exposant*, $-\frac{m+4}{m+3}$, *lisez* $\frac{m+2}{m+3}$.
— *ibid.* — 17, dx, *lisez* dx'.

Pag. 371, ligne 4, $\frac{dv}{dx}$, *lisez* $\frac{dv}{dy}$.

— 372, — 8 et 14, tang. $\frac{x}{y}$, *lisez* tang. $= \frac{x}{y}$.

— 373, — 8, $\frac{dN}{dy}$, *lisez* $\frac{dN}{dx}$.

— 374, — 7, $\frac{1}{2}$ lx, *lisez* lx.

— 388, — 5, $\sqrt{1+c^2}$, *lisez* $n\sqrt{1+c^2}$.

— 394, — 6, $\sqrt{y-c}$, *lisez* $\sqrt{y-2c}$.

— 395, — 3, $\int Q dq$, *lisez* $\int Q dq + C$.

— 416, — *dernière*, $T dt$, *lisez* $T' dt$.

— 417, — 2 en remont., $\frac{T+T'\theta}{A+A'\theta}$, *lisez* $T + T'\theta$.

— 422, — 10, *multipliez le second membre par* dt.

— *ibid.* — 15, + etc. *lisez* — etc.

— 423, — 13, $b+u \;\; b_1$, *lisez* $b+u \mp b_1$,

— 425, — 23, 2, *lisez* $n+2$.

— 427, — 19, $M'' M'Q$, *lisez* $M'' M'Q'$.

— 428, — 3, *après le mot* suite, *ajoutez* puis faisant $x = a$.

— *ibid.* — 19, *après* osculatrice, *ajoutez* $M'N'$.

— *ibid.* — 20, *après* troisième, *ajoutez* $M''N''$.

— 435, — 14, $2d^2yu$, *lisez* $2ud^2y$.

— 436, — 6, $2d^2yu$, *lisez* $2ud^2y$.

— 438, — *dernière*, hdV, *lisez* hdV'.

— 443, — 1, $ydx + xdy$, *lisez* $xdx + ydy$.

— *ibid.* — 5, *au dénom.* $n^2 - x$, *lisez* $n^2 - x^2$, *et multipliez le radical par* n.

— 447, — 21, *au numér.* max'^{n-1}, *lisez* max'^{m-1}.

— 453, — 4, $\frac{dz}{dx} = q$, *lisez* $\frac{dz}{dy} = q$,

— 455, — 11, dV, *lisez* d^2V.

— 462, — 10, d'avoit, *lisez* d'avoir.

— 465, — 9, $\varphi'(U)$, *lisez* $\varphi'(M)$.

— *ibid.* — 15, *supprimez le* d *qui est devant la parenthèse.*

— 466, — 26, x, *lisez* y.

— 468, — 16, *mettez avant l'accolade la lettre* f.

— 469, — 18, $\frac{d^2z}{dx\,dy} = P\frac{dz}{dy}$, *lisez* $\frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dy}$.

— 470, — 4, *mettez* x, *à la place de* y.

— 476, — 28, l'équation de (A), *effacez* de.

— 478, — 8, b, *lisez* b'.

— 486, — 18, MR, *lisez* $M'R$.

— 488, — 4, *lisez* $\delta dy = \delta y' - \delta y = \pi(y') - \pi(y)$.

Pag. 492, lig. 22, *au numér.*, $-\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, *lisez* $-\mathrm{d}y\delta x$.

— 496, — 21, $3\mathrm{d}R$, *lisez* $3\mathrm{d}^2R$.

— 508, — 19, δU, *lisez* $\int\delta U$.

— 515, — 4, $\Delta^2 u_u$ *lisez* $\Delta^2 u_n$.

— 519, — 4, $(m-2)x^{m-3}+M'_4x^{m-4}$, *lisez* ....
$(m-2)x^{m-3}h^3+M'_4x^{m-4}h^4$.

— 526, — 1, Δu est ce que devient Δu_1, *lisez* Δu_1 est ce que devient Δu.

— 529, — 23, $e\mathrm{d}x^{\mathrm{d}u}h$, *lisez* $e^{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h}$.

— 541, — 1, des, *lisez* à des.

— 542, — 17, peut mettre u, *lisez* peut mettre u'.

— 543, — 1, *au dénom.* de la 3ᵉ équat., x_3-x_3, *lisez* x_3-x_2.

— 544, — 7, $u=\alpha+\beta x+\gamma x+\delta x+$ etc., *lisez* ....
$u=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+$ etc.

— *ibid.* — 23, $x'=x$, *lisez* $x'=x_2$.

— 545, — *après la troisième ligne, mettez* etc.

— 546, — 22, 3ᵉ *colonne*, ${}^2\Delta u$, *lisez* $\Delta^2 u$.

— 552, — *avant-dernière*, $\frac{1}{6}\frac{x^5}{h}$, *lisez* $\frac{1}{6}\frac{x^6}{h}$.

— 554, — *dernière*, Σx^m, *lisez* $\Sigma x^m h$.

— 556, — *dernière*, *au numér.*, -1, *lisez* 1.

— 557, — 18, $6h^2$, *lisez* $6h^3$.

— 561, — *dernière*, rie, *lisez* série.

— 564, — 10, $0\Delta=Q\Sigma(P+\Delta P)$, *lisez* $0=\Delta Q\Sigma(P+\Delta P)$.

— 567, — 5, nº 361, *lisez* 360.

— *ibid.* — 7, *au dénom.*, $m+1$, *lisez* $(m+1)h$.

— *ibid.* — 9, *au num.*, 1, *lisez* -1; *au dén.*, $m+1$, *lis.* $m-1$.

— *ibid.* — 16, $S\frac{x(x+1)(x+2)}{2.3}$, *lisez* $S^{\frac{x(x+1)(x+2)}{2.3}}$.

— 569, — 6, (342), *lisez* (343).

— 575, — 3, nº 306, *lisez* nº 287.

— *ibid.* — 19, 19, z, *lisez* z_x.

— 576, — 9, *effacez le crochet qui est au bout de cette ligne.*

— *ibid.* — 15, $C''_{x+1}z'_{x+2}$, *lisez* $+\ C''_{x+1}z''_{x+2}$.

— *ibid.* — *dernière*, $C''_x z'_{x+3}$, *lisez* $C'_x z'_{x+3}$.

— 577, — 9, $z'_{x+n}\Delta C''_x$, *lisez* $z'_{x+n}\Delta C'_x$.

— 583, — 26, Δy, *lisez* Δx.

— 587, — 18, $p(1+r)(a+\beta)$, *lisez* $p(1+r)(\alpha+\beta)$.

— 588, — 7, $(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}}$, *lisez* $(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}}$.

Pag. 588, lig. 9, px^r, *lisez* $px^r dx$.

— 589, — 1, $\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}$, *lisez* $\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}$.

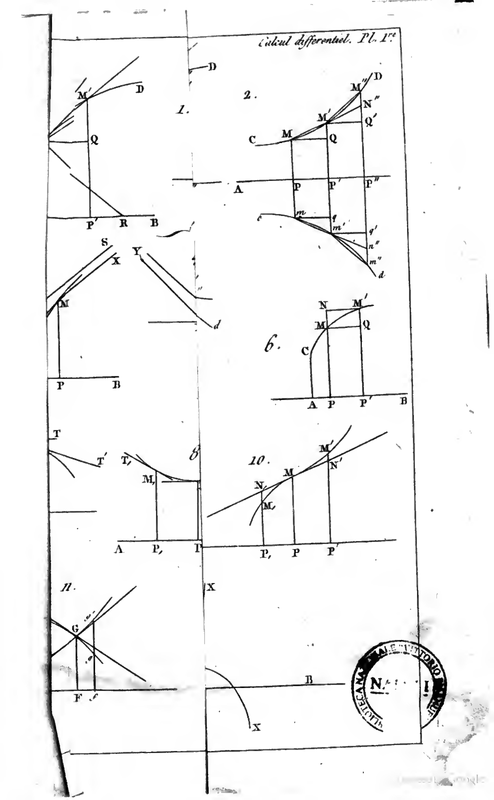
— *ibid.* — 7, $x^{\frac{\alpha}{\beta}+1}$, *lisez* $x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}$.

— 593, — 18, n° 363, *lisez* n° 364.

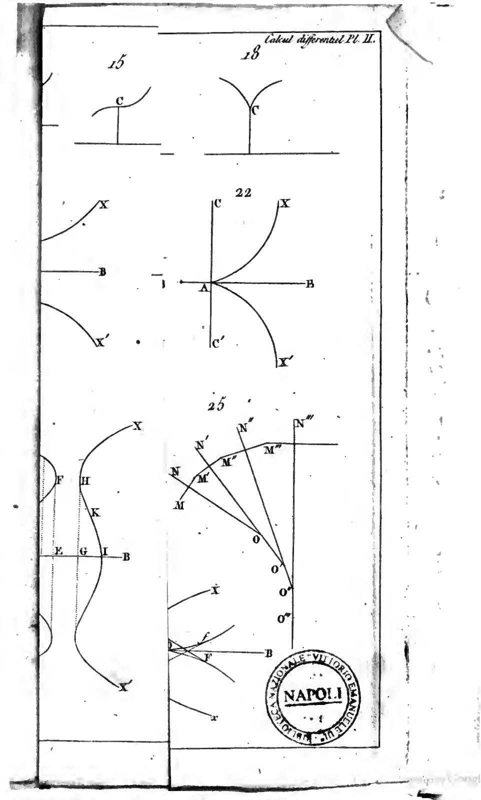
— *ibid.* — 19, (132), *lisez* (182).

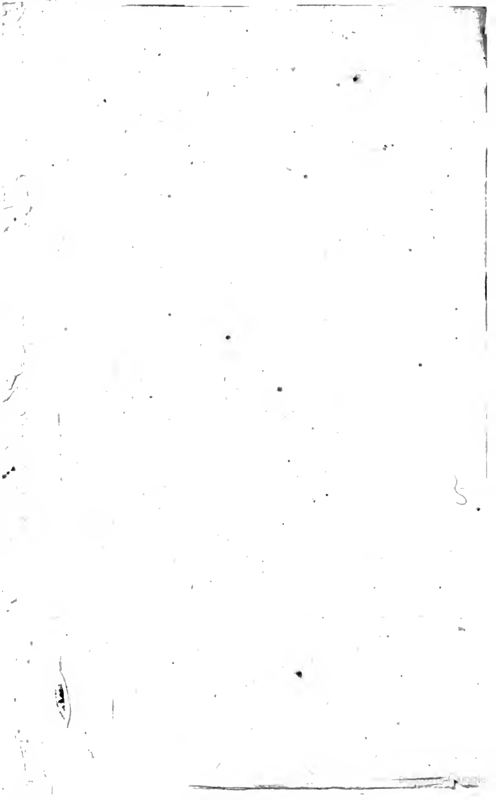
— 595, — 10, l2l + l2, *lisez* l2 + l3.

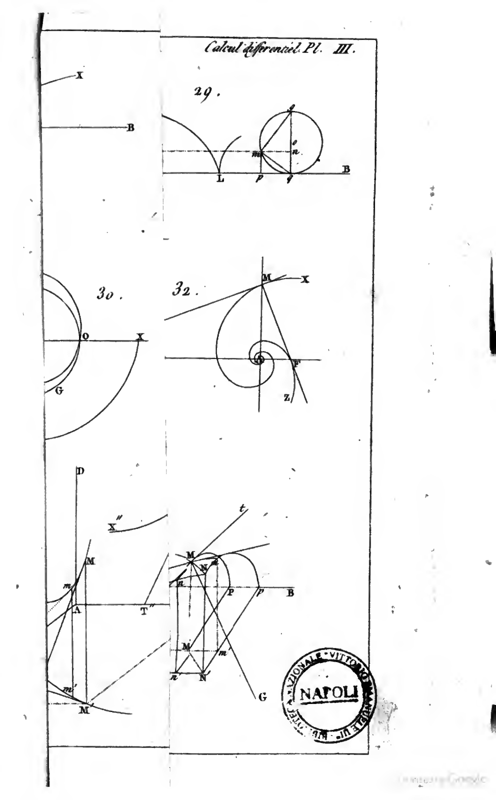
— 598, — *dernière*, $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-2}}$, *lisez* $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$.



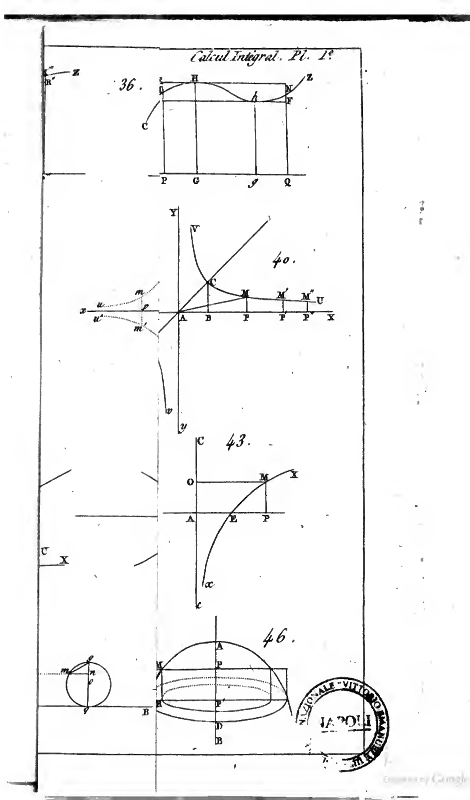
1.
2.
6.
8
10.
11.
M'
D
Q
P'
R
B
C
M
M''
N''
Q'
A
P
P''
m
q
m'
q'
n''
m''
d
S
X
Y
N
T
T'
T,
M,
P,
N,
M,
N'
G
F

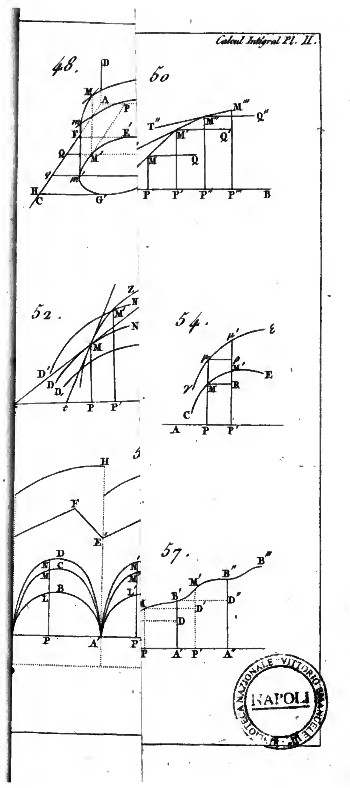

15
C
18
C
22
C
X
B
A
B
C′
X′
X
B
X′
25
N‴
N″
N′
M‴
M″
N
M′
M
X
F
H
K
E
G
I
B
O
O′
O″
O‴
X
f
F
B
X′
x′




29.
30.
32.
X
B
L
p
q
m
n
o
O
G
M
F
Z
D
A
T"
X"
t
N
P
N'
M'
m'
n'




36.
H
N
Z
C
h
F
P
G
g
Q
Y
V
40.
C
M
M'
M''
U
x
u
m
p
u'
m'
A
B
P
P'
P''
X
v
y
C
43.
O
M
X
A
E
P
x
c
46.
A
M
P
P'
D
B
m
n
q
B


48.
50
52.
54.
57.